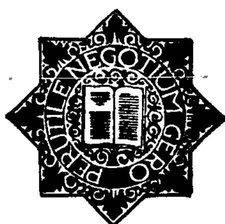
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

11e JAARGANG 1934/35, Nr. 6.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
P. WIJDENES, Gebroken rationale vergelijkingen	241—246
P. WIJDENES, Het eerste vraagstuk over driehoeksmeting van het eindexamen H.B.S. met vijfjarige cursus in 1935	247—255
T. EHRENFEST—AFANASSJEWA, Een en ander over de definities	256—273
E. T. STELLER, Gezichtsbedrog	274
Boekbespreking en ingekomen boeken	275—276
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Historische revue.	277—284

GEBROKEN RATIONALE VERGELIJKINGEN.[1]

§ 59 UIT LAGERE ALGEBRA II 3e druk.

Onder een gebroken rationale vergelijking verstaat men een vergelijking van de vorm $f(x) = g(x)$, waarin $f(x)$ en $g(x)$ *rationale functies zijn, die niet beide geheel zijn.*

De oplossing van zo'n vergelijking geschiedt gewoonlijk door hem te herleiden tot de gedaante $\frac{P}{Q} = 0$, waarin P en Q onderling ondeelbare veeltermen in x zijn. Bij deze herleiding mogen de stellingen van § 2 niet zonder meer toegepast worden voor het geval, dat A, B en C gebroken rationale vormen zijn[2]. We beginnen daarom met een paar voorbeelden, waarin een rationale vergelijking door middel van niet gerechtvaardigde herleidingen wordt opgelost en waarbij dus wortels ingevoerd of verduisterd kunnen zijn, doordat niet steeds een vergelijking door een daarmee gelijkwaardige vervangen is. Tevens zullen we zien, dat we gedwongen zullen worden onze op blz. 3 gegeven definitie van „wortel van een vergelijking" uit te breiden[3], daar we gevallen krijgen, waarin door die definitie niet voorzien is.

1. *Los x op uit de vergelijking:* $\frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{x+2}$ . . . (1)

Opl. Vermenigvuldigt men beide leden met $x + 2$, dan komt er: $x^2 = 4$, waaruit volgt $x_{1,2} = \pm 2$. Bij substitutie blijkt de

[1]) Dit stukje dient om, in aansluiting aan het artikel van Dr. Wansink (bldz. 226—238) ook de oplossing met het door limietbeschouwingen uitgebreide wortelbegrip te belichten.

[2]) Deze stellingen zijn: (A, B en C zijn veeltermen in x):
1. De vergelijkingen A = B en A + C = B + C zijn gelijkwaardig.
2. Is C een veelterm, die voor geen waarde van de onbekende nul wordt, dan zijn de vergelijkingen A = B en AC = BC gelijkwaardig.
3. De vergelijking AC = BC is gelijkwaardig met A = B of C = 0. (Hiermee wordt bedoeld, dat een wortel x_1 van AC = BC aan minstens één van de genoemde vergelijkingen voldoet.)

[3]) Verkort aldus: Met de vergelijking A = B (veeltermen in x) wordt bedoeld de opgave: bepaal de waarden der in A en (òf) B voorkomende onbekenden zodanig, dat bij substitutie van die waarden A = B wordt. Men zegt dan, dat deze waarden aan de vergelijking voldoen; elke waarde, die voldoet, heet een wortel.

wortel 2 inderdaad te voldoen $\left(\frac{4}{4}=\frac{4}{4}\right)$; substitutie van $x=-2$ in de gegeven vergelijking geeft $\frac{4}{0}=\frac{4}{0}$ . . . . (2)

Beide leden worden zinloos (zie Deel I, § 36) en dit is een geval, waarin door de op blz. 3 gegeven definitie van wortel van een vergelijking niet voorzien is. Nu kan men zich hier wel van af maken door te beweren, dat twee uitdrukkingen, die zinloos zijn, moeilijk als gelijk bestempeld kunnen worden. Om deze reden alleen al zou men dan — 2 als wortel van de vergelijking (1) kunnen verwerpen.

Anderzijds zal de lezer wellicht opmerken, dat beide leden van (1) voor $x=-2$ zo „volkomen dezelfde gedaante" aannemen (zie (2)), dat men — 2 toch wel als wortel van (1) kan aanmerken. Nu moet men hiermee echter zeer voorzichtig zijn, want het is niet lastig te bewijzen, dat beide leden van (1) voor $x=-2$ toch weer niet zo „volkomen dezelfde gedaante" aannemen. Het eerste lid van (1) is nl. te schrijven als $x-2+\frac{4}{x+2}$ en dit neemt voor $x=-2$ de gedaante $-4+\frac{4}{0}$ aan, hetgeen men toch weer moeilijk als gelijk aan $\frac{4}{0}$ kan beschouwen.

Wel blijkt, dat het verschil van beide leden van (1) $x-2$ bedraagt en dus slechts nul is, als $x=2$ is. Daar het voor de hand ligt om twee grootheden slechts dan gelijk te noemen, als hun verschil nul is (of althans nul tot limiet heeft), zal men — 2 dan toch weer niet als wortel van de vergelijking (1) beschouwen.

2. *Los x op uit de vergelijking:*

$$\frac{x^2-6x}{x-3}=\frac{-9}{x-3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Opl. Vermenigvuldigt men beide leden met $x-3$, dan komt er opv.: $x^2-6x=-9$ of $x^2-6x+9=0$, dus $(x-3)^2=0$, waaruit volgt: $x=3$.

Bij substitutie in de gegeven vergelijking (3) komt er echter:

$$\frac{-9}{0}=\frac{-9}{0}.$$

We krijgen nu dezelfde moeilijkheid als in het vorige voorbeeld. Nu is echter het eerste lid van (3) te schrijven als:

$$x-3+\frac{-9}{x-3}=\frac{-9}{x-3},$$

waaruit blijkt, dat het verschil van beide leden $x - 3$ bedraagt en dus juist nul wordt voor $x = 3$. Hier zal er dus alle reden zijn, om 3 wel als wortel te beschouwen.

Het ligt inderdaad voor de hand, om die waarde(n) van x, waarvoor het verschil van beide leden der vergelijking nul tot limiet heeft, nog als wortel(s) van de vergelijking te beschouwen. Dit blijkt later met het oog op de grafische voorstelling en op andere vergelijkingen (b.v. de goniometrische [1])) wel de meest geschikte uitbreiding van het begrip „wortel van een vergelijking" te zijn. [2])
We vullen daarom de vroeger gegeven definitie aan tot:

Het getal c heet een wortel van de vergelijking:

$$\mathbf{f(x) = g(x),}$$

als f(c) = g(c) is.

Zijn f(c) en (of) g(c) zinloos, dan heet c een wortel, als:

$$\lim_{x=c} \{f(x) - g(x)\} = 0 \text{ is.}$$

We noemen dus -2 geen wortel van de vergelijking $\frac{x^2}{x+2}=\frac{4}{x+2}$, daar $\lim\limits_{x=-2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim\limits_{x=-2} (x-2) = -4 \neq 0$ is.

Echter beschouwen we 3 wel als wortel van de vergelijking:

$$\frac{x^2-6x}{x-3}=\frac{-9}{x-3},$$

daar $$\lim_{x=3} \frac{x^2-6x+9}{x-3} = \lim_{x=3} (x-3) = 0 \text{ is.}$$

We hebben nu na te gaan of de stellingen van § 2 ook voor gebroken rationale vergelijkingen gelden. Met de 1e stelling is dit inderdaad het geval, daar:

---

[1]) Zie P. Wijdenes, Leerboek der Gonio- en Trigonometrie, 4e druk, § 105 en P. Wijdenes, Middel-Algebra, 2e druk, § 111, nr. 38.

[2]) Bij het schoolonderwijs houde men zich aan de enge definitie, zoals die in de Nieuwe Schoolalgebra is te vinden: „Herleid tot $\frac{P}{Q} = 0$; vereenvoudig die tot $\frac{R}{S} = 0$; de wortels van $R = 0$ voldoen aan de vergelijking, mits ze niet Q nul maken". Of aldus: „herleid tot $\frac{P}{Q} = 0$; de nulpunten van P zijn wortels, tenzij die ook Q nul maken".

$$\lim (A - B) = \lim \{(A + C) - (B + C)\} \text{ is}^{1}).$$

Een belangrijk gevolg hiervan is weer, *dat de vergelijking in een daarmee gelijkwaardige overgaat, als men een of meer termen van het ene lid met tegengesteld teken in het andere lid overbrengt.*

We kunnen met behulp hiervan elke gebroken rationale vergelijking *op nul herleiden,* d.w.z. in de gedaante

$$\frac{P}{Q} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

brengen, waarbij P en Q veeltermen in de onbekende zijn. De 2e en 3e stelling blijven hier niet geldig, daar uit $\lim (A - B) = 0$ niet zonder meer volgt, dat $\lim (AC - BC) = 0$ is.

Is b.v. $A = \frac{x^3}{x+2}$, $B = \frac{4x}{x+2}$ en $C = \frac{1}{x-2}$, dan is:

$$\lim_{x=2} (A - B) = \lim_{x=2} \frac{x^3 - 4x}{x+2} = \lim_{x=2} x(x-2) = 0, \text{ terwijl:}$$

$$\lim_{x=2} (AC - BC) = \lim_{x=2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x=2} x = 2 \text{ is.}$$

Als de veeltermen P en Q in (1) een factor R gemeen hebben, dus als b.v. $P = P'R$ en $Q = Q'R$ is, dan is:

$$\lim \frac{P}{Q} = \lim \frac{P'R}{Q'R} = \lim \frac{P'}{Q'},$$

zodat dan de vergelijking $\frac{P'}{Q'} = 0$ gelijkwaardig is met (1).

Is R de grootste gemene deler van P en Q, dan zijn P' en Q' onderling ondeelbaar en is de vergelijking $\frac{P'}{Q'} = 0$ gelijkwaardig met $P' = 0$. Men heeft nl.:

Zijn de veeltermen f(x) en g(x) onderling ondeelbaar, dan is de vergelijking $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ldots.$ (I) gelijkwaardig met $f(x) = 0 \ldots.$ (II).

---

[1]) Het bezwaar, dat in de noot van blz. 7 van Lagere Algebra II geopperd wordt, wordt door de uitbreiding van het begrip „wortel van een vergelijking" blijkbaar juist opgeheven. Deze noot bij st. 1 luidt: Is C een gebroken rationale vorm in x, b.v. $C \equiv \frac{1}{x-3}$ en heeft $A = B$ de wortel $x_1 = 3$, dan zou C_1 (d.i. de waarde van C voor $x = x_1$) de gedaante $\frac{1}{0}$ aannemen en dus zinloos zijn. Is C geen rationale vorm, dan kan het ook voorkomen, dat C_1 méér dan een waarde heeft. In zulke gevallen is de stelling dus niet zonder meer geldig.

Bewijs. We merken allereerst op, dat de vergelijkingen (I) en (II) hier slechts wortels in de betekenis van de noot van blz. 241 kunnen hebben, daar de veelterm $f(x)$ voor geen enkele waarde van x onbepaald kan worden, terwijl $f(x)$ en $g(x)$ niet voor een zelfde waarde van x nul kunnen worden, omdat ze onderling ondeelbaar zijn. Is nu x_1 een wortel van (I), dan is $\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = 0$, waaruit volgt $f(x_1) = 0$, zodat x_1 ook een wortel is van (II). Is omgekeerd x_2 een wortel van de vergelijking (II), dan is $f(x_2) = 0$, dus $g(x_2) \neq 0$, daar anders $f(x)$ en $g(x)$ de factor $x - x_2$ gemeen zouden hebben; dan is dus $\frac{f(x_2)}{g(x_2)} = 0$, zodat x_2 ook aan (I) voldoet. De vergelijkingen (I) en (II) zijn dus inderdaad gelijkwaardig.

In verband met deze stelling kunnen we nu de volgende algemene regel geven voor het oplossen van rationale vergelijkingen:

Herleid de vergelijking tot de onvereenvoudigbare gedaante:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

waarbij f(x) en g(x) veeltermen zijn en bepaal de wortels van de vergelijking: $f(x) = 0$.

Bij het herleiden van een gebroken rationale vergelijking tot de onvereenvoudigbare gedaante $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ gaat men dan gewoonlijk als volgt te werk:

1°. *Herleid de vergelijking op nul.*

2°. *Breng alle termen van het eerste lid op één noemer.*

3°. *Deel teller en noemer van het eerste lid door hun grootste gemene deler.*

Zoals in het voorgaande is aangetoond, krijgt men op deze wijze steeds een gehele rationale vergelijking, die gelijkwaardig is met de gegeven gebroken rationale vergelijking.

We geven nu een paar voorbeelden, waarbij we beginnen met de voorbeelden 1 en 2 (zie blz. 241 en 242) op de juiste manier op te lossen.

1. *Los x op uit de vergelijking:*

$$\frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{x+2}.$$

Opl. Volgens bovenstaande regels komt er achtereenvolgens:

$$\frac{x^2 - 4}{x+2} = 0, \quad x - 2 = 0, \quad \text{dus } x = 2.$$

2. *Los x op uit de vergelijking:*

$$\frac{x^2-6x}{x-3}=\frac{-9}{x-3}.$$

Opl. Er komt nu:

$$\frac{x^2-6x+9}{x-3}=0, \quad x-3=0, \quad \text{dus } x=3.$$

Zoals men ziet, verloopt de oplossing op deze wijze zeer eenvoudig. We geven nog een paar grotere voorbeelden, nl.:

3. *Los op:* $\frac{1}{1-2x}+\frac{8-x}{3+x}=2x-\frac{4x^2}{2x-1}.$

Opl. Herleidt men de vergelijking op nul en brengt men alle termen op de noemer $(x+3)(2x-1)$, dan komt er:

$$\frac{x+3+(x-8)(2x-1)+2x(x+3)(2x-1)-4x^2(x+3)}{(x+3)(2x-1)}=0,$$

of: $$\frac{-22x+11}{(x+3)(2x-1)}=0, \quad \text{dus: } \frac{-11}{x+3}=0.$$

Deze laatste vergelijking heeft geen wortels en is dus vals, hetgeen dan ook voor de gegeven vergelijking geldt.

De voorbeelden 4 en 5 laten we weg, evenals 7 en 8.

6. *Los x op uit de vergelijking:*

$$\frac{3a+1}{x-a}+\frac{a+1}{x+a}+2=0.$$

Opl. De vergelijking is achtereenvolgens gelijkwaardig met:

$$\frac{(3a+1)x+3a^2+a+(a+1)x-a^2-a+2x^2-2a^2}{(x-a)(x+a)}=0,$$

$$\frac{x(x+2a+1)}{(x-a)(x+a)}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In het algemeen is deze vergelijking gelijkwaardig met:

$$x(x+2a+1)=0,$$

waaruit volgt: $x_1=0, x_2=-2a-1.$

Voor bijzondere waarden van a kunnen teller en noemer van het eerste lid van (1) echter een factor gemeen hebben, nl.:

1°. $a=0$, dan gaat (1) over in: $\frac{x+1}{x}=0$ met de wortel -1.

2°. $a=-1$, „ „ (1) „ „ : $\frac{x}{x+1}=0$ „ „ „ 0.

3°. $a=-{}^1/_3$, „ „ (1) „ „ : $\frac{x}{x-{}^1/_3}=0$ „ „ „ 0.

HET EERSTE VRAAGSTUK OVER DRIEHOEKSMETING VAN HET EINDEXAMEN H.B.S. MET VIJFJARIGE CURSUS IN 1935.

---

1. R is de straal van de omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC. X, Y en Z zijn de middens van de kleinste der bogen, opvolgend door de zijden BC, CA en AB onderspannen.

a. Bewijs, als O_1 de oppervlakte van $\triangle$ ABC voorstelt:

$$O_1 = 2\ R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

b. Bewijs (met gebruikmaking van het onder *a* bewezene), als O_2 de oppervlakte van $\triangle$ XYZ voorstelt:

$$O_2 = 2\ R^2 \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C.$$

c. Als $\triangle$ ABC gelijkbenig is en $O_2 = 2\ O_1$, bereken dan de tophoek van die gelijkbenige driehoek.

d. Bewijs, dat voor de gelijkheid van O_1 en O_2 nodig is, dat de driehoek gelijkzijdig is.

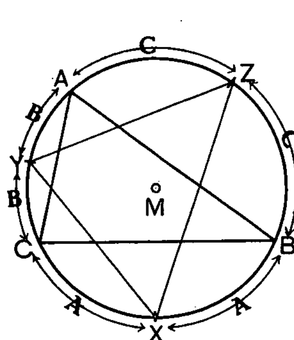


Fig. 1.

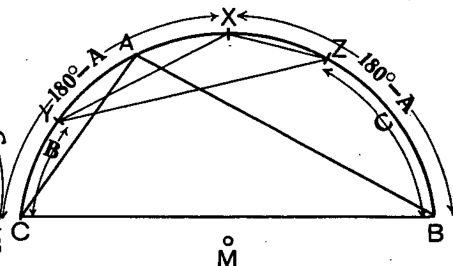


Fig. 2.

Oplossing. a. $O_1 = \tfrac{1}{2}\ bc \sin A$; $b = 2\ R \sin B$ en $c = 2\ R \sin C$, dus is $O_1 = 2\ R^2 \sin A \sin B \sin C$.

b. Onderstel de driehoek scherphoekig (fig. 1); de hoeken van $\triangle$ XYZ zijn: $\angle X = \tfrac{1}{2}\ (B + C)$; $\angle Y = \tfrac{1}{2}\ (C + A)$ en

$\angle Z = \frac{1}{2}(A + B)$; hun sinussen zijn opv. gelijk aan cos ½ A, cos ½ B en cos ½ C; dus $O_2 = 2 R^2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$.

Onderstel $\angle A = 90°$; de beide andere dus B en 90° — B; er is van een kleinste boog BC geen sprake; er zijn twee driehoeken, nl. XYZ en X'YZ, waarvan X en X' aan weerszijden van BC liggen; voor de grootste daarvan geldt de formule, onder *b* genoemd; de formule voor de kleinste komt van zelf te voorschijn bij het derde geval, waarbij er weer wel een kleinste boog is.

Onderstel $\angle A$ stomp (fig. 2); $\angle X = \frac{1}{2}(360° - B - C) = 180° - \frac{1}{2}(B + C) = 90° + \frac{1}{2} A$; $\angle Y = \frac{1}{2} B$ en $\angle Z = \frac{1}{2} C$; men vindt nu $O_2 = 2 R^2 \sin (90° + \frac{1}{2} A) \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = 2 R^2 \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$ (in de opgave is blijkbaar vergeten er bij te zetten, dat △ ABC scherphoekig ondersteld wordt).

c. We onderstellen eerst, dat △ ABC scherphoekig is; dan is $R^2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C = 2 R^2 \sin A \sin B \sin C$, dus $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = \frac{1}{16}$.

Neem $\angle B = \angle C$; beide zijn gelijk aan 90° — ½ A en dus de halve hoeken 45° — ¼ A; $\sin^2 (45° - \frac{1}{4} A) = \frac{1}{2} \{1 - \cos (90° - \frac{1}{2} A)\} = \frac{1}{2}(1 - \sin \frac{1}{2} A)$; de vergelijking wordt dus $\sin \frac{1}{2} A (1 - \sin \frac{1}{2} A) = \frac{1}{8}$ of wel: $\sin^2 \frac{1}{2} A - \sin \frac{1}{2} A + \frac{1}{8} = 0$; $2 \sin \frac{1}{2} A - 1 = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$[1]) $= \pm 0{,}707107$ (het plusteken geeft een stompe hoek voor A); we krijgen dus $\sin \frac{1}{2} A = 0{,}14645$; ½ A = 8° 25'; A = 16° 50' (in zulke gevallen is het m.i. gewenst zich tot minuten te beperken; het gaat hier om de methode, niet om wat seconden meer of minder).

Als de driehoek rechthoekig is in A, is er voor beide mogelijke driehoeken een bepaalde verhouding, die ongelijk is aan de gegeven verhouding, nl. $\frac{O_2}{O_1} = 2$.

---

[1]) $ax^2 + bx + c = 0$ wordt vervangen door $2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ of $2ax + b = \pm \sqrt{D}$; dit is eenvoudiger om mee te werken dan met $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (zie vooral de 6e druk van de Nieuwe Schoolalgebra II).

$2ax + b$ is de afgeleide van $ax^2 + bx + c$; D is de discriminant; deze begrippen hangen bij de vergelijkingen, zo men weet, ten nauwste samen. We behoeven dat „afleiden" aan de leerlingen niet te vertellen, maar toch is het goed, dat ze later zien, dat de techniek zo fijn op de theorie steunt.

Als de driehoek stomphoekig is, geeft $O_2 = 2\ O_1$ het volgende: $\cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = 2 \sin A \sin B \sin C$, of $\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C = {}^1/_{16}$.

Stel $B = C = 90° - \frac{1}{2} A$, dus $\frac{1}{2} B = \frac{1}{2} C = 45° - \frac{1}{4} A$; $\cos^2 (45° - \frac{1}{4} A) = \frac{1}{2} \{1 + \cos (90° - \frac{1}{2} A)\} = \frac{1}{2} (1 + \sin \frac{1}{2} A)$; we moeten dus A berekenen uit $\sin \frac{1}{2} A (1 + \sin \frac{1}{2} A) = \frac{1}{8}$ of uit $\sin^2 \frac{1}{2} A + \sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{8}$. In dit derde geval is $\frac{1}{2} A > 45°$, dus $\sin \frac{1}{2} A > \frac{1}{2} \sqrt{2}$, dus $\sin^2 \frac{1}{2} A + \sin \frac{1}{2} A > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} > \frac{1}{8}$. Er voldoet dus geen stomphoekige driehoek aan vraag *c*.

Het vraagstuk tot zo ver is eenvoudig; met het geval van de rechthoekige en de stomphoekige driehoek er bij en de berekening vraagt het genoeg werk op het examen. Er zou echter geen aanleiding geweest zijn om de oplossing te geven, ware het niet, dat er nog een vierde opgave volgde; opgave *d* leidt tot de betrekking $\sin A \sin B \sin C = \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$, dus $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = \frac{1}{8}$. En nu maak ik me sterk (ik schrijf dit op 3 Juni, nadat ik op 1 Juni de opgaven zag en nog van niemand iets gehoord heb omtrent de resultaten), dat er niet 1 op de 50 candidaten het bewijs geleverd heeft, dat in *d* wordt gevraagd; tot welke gevolgtrekking dit leidt, moet de lezer maar uitmaken.

1e Opl. (van W i j d e n e s). Een zijde van een driehoek is gelijk aan de middellijn van de omgeschreven cirkel maal de sinus van de overstaande hoek; in fig. 3 is dus $BD = 2R \sin \frac{1}{2} A$; $BI = 4 R \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C$ en $r = 4 R \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$; we krijgen dus $r = \frac{1}{2} R$, een bekende betrekking voor de gelijkzijdige driehoek; maar nu wordt het omgekeerde gevraagd en daartoe bewijs ik, dat de middelpunten I en M samenvallen.

Fig. 3.

$IM^2 = R^2 - AI \, . \, ID$; $AI = \dfrac{r}{\sin {}^1/_2 A}$ in $\triangle$ AEI; $ID = BD = 2 R \sin \frac{1}{2} A$; dus $IM^2 = R^2 - 2 Rr$; nu is in ons geval $R = 2 r$; dus is $IM = 0$. Een driehoek, waarvan I en M samenvallen, is gelijkzijdig.

2e Opl. (van Herreilers). We gaan uit van de betrekking:

$8 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = 1$; vervang $2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B$ door het verschil van twee cosinussen en bedenk, dat $\frac{1}{2} C = 90^\circ - \frac{1}{2}(A + B)$ is.

$$4\{\cos \tfrac{1}{2}(A - B) - \cos \tfrac{1}{2}(A + B)\} \cos \tfrac{1}{2}(A + B) = 1.$$

Na herleiding op nul krijgen we in het eerste lid twee termen van het kwadraat van een tweeterm, nl.

$$4 \cos^2 \tfrac{1}{2}(A + B) - 4 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B) + 1 = 0.$$

We voegen als derde term er aan toe $\cos^2 \frac{1}{2}(A - B)$, maar trekken die als vijfde term weer af; we zetten dan $1 - \cos^2 \frac{1}{2}(A - B) = \sin^2 \frac{1}{2}(A - B)$; alles met het kennelijke doel om de som van twee kwadraten te krijgen, nl.

$$\{2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) - \cos \tfrac{1}{2}(A - B)\}^2 + \sin^2 \tfrac{1}{2}(A - B) = 0.$$

Beide termen moeten nu nul zijn; de laatste geeft alvast $A = B$; dit in de eerste geeft:

$2 \cos \frac{1}{2}(A + B) - 1 = 0$, dus $\cos \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}$ of wel $\cos A = \frac{1}{2}$, dus $A = B = 60^\circ$ en dus ook $C = 60^\circ$.

3e Opl. (van Harlaar). Voor twee scherpe hoeken x en y geldt: $\sin x \sin y = \frac{1}{2} \cos (x - y) - \frac{1}{2} \cos (x + y) = \sin^2 \frac{1}{2}(x + y) - \sin^2 \frac{1}{2}(x - y)$, dus $\sin x \sin y \leqq \sin^2 \frac{1}{2}(x + y) \ldots (1)$ (waarbij het gelijkteken alleen geldt, als $x = y$ is).

De betrekking heeft drie factoren in het eerste lid en formule (1) kunnen we alleen toepassen, als het aantal 2, en bij uitbreiding 4, (8, 16, ...) is; we voegen dus opzettelijk een factor $\sin 30^\circ$ toe aan $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$, omdat de halve hoeken per slot alle 30° zullen moeten worden, wat van te voren al duidelijk is.

$$\begin{cases} \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \leqq \sin^2 \tfrac{1}{4}(A + B) \\ \sin \tfrac{1}{2} C \sin 30^\circ \leqq \sin^2 \tfrac{1}{4}(C + 60^\circ) \end{cases}$$

$\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \sin 30^\circ \leqq \{\sin \frac{1}{4}(A + B) \sin \frac{1}{4}(C + 60^\circ)\}^2 \leqq \sin^4 \frac{1}{8}(A + B + C + 60^\circ) = \sin^4 30^\circ = \frac{1}{16}$

Hierin geldt alleen dan overal het gelijkteken (m.a.w. alleen dan geldt $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = \frac{1}{8}$), als $A = B$ en $C = 60^\circ$ is, dus als $\triangle ABC$ gelijkzijdig is.

4e Opl. In de eerste oplossing wordt direct gevonden (en m.i. kan

men ook wel vragen het te bewijzen), dat $r = 4$ R sin ½ A sin ½ B sin ½ C is en dus in geval d, dat $r =$ ½ R wordt. De candidaat zal dit allicht omzetten in:

$$\frac{O}{s} = \frac{abc}{8O} \text{ of } \frac{8O^2}{s} = abc \text{ of}$$

$$8\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c) = abc \text{ of}$$

$$(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c) - abc = 0 \ldots\ldots (2)$$

Het eerste lid is niet deelbaar door $a - b$; dat is direct na te gaan met de reststelling; maar ..... onnodig; deelbaarheid door $a - b$ zou er immers op wijzen, dat bij de gegeven betrekking het gelijkbenig zijn al voldoende zou zijn. $a = b = c$ zou kunnen volgen uit een factor $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$; de andere zou dan $a + b + c$ moeten zijn (nl. symmetrisch en van de eerste graad); de reststelling, vervanging van a door $-b-c$, geeft niet nul; ook deze onderstelling is fout.

Deze overwegingen zonder cijferwerk mogen van een candidaat niet verlangd worden; maar de overwegingen liggen voor de hand; daarom geef ik ze ook. Herreilers vindt er het volgende op: $(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c) - abc = 0$ geeft, uitgewerkt:

$\Sigma a^3 - \Sigma a^2 b + 3\,abc = 0$. Dit schrijven we in de vorm:

$(\Sigma a^3 - 3\,abc) - (\Sigma a^2 b - 6\,abc) = 0 \ldots\ldots (3)$ met het doel van de bekende ontbinding van $\Sigma a^3 - 3\,abc$ in $\frac{1}{2}\,\Sigma a . \Sigma (a-b)^2$ gebruik te kunnen maken.

De tweede term van (3) is: $\Sigma a^2 b - 6\,abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$; we krijgen dus (we nemen een term als voorbeeld):

$\frac{1}{2}\,(a+b+c)\,.\,(a-b) - c\,(a-b)^2 = (s-c)\,(a-b)^2$; de gehele betrekking wordt derhalve: $\Sigma\,(s-\underset{\circ}{c})\,(a-b)^2 = 0$; het eerste lid is alleen nul, als $a = b = c$ is, daar $s-a$, $s-b$ en $s-c$ alle positief zijn.

Op een geheel afwijkende manier wordt door Harlaar de volgende oplossing gegeven.

De middelevenredige van twee positieve getallen is kleiner dan of gelijk aan het gemiddelde:

$\sqrt{pq} \leqq \frac{1}{2}\,(p+q)$, waarbij het gelijkteken alleen geldt, als $p = q$ is.

Dus is:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{-a+b+c}\,.\,\sqrt{a-b+c} & \leqq c \\ \sqrt{a-b+c}\,.\,\sqrt{a+b-c} & \leqq a \\ \sqrt{a+b-c}\,.\,\sqrt{-a+b+c} & \leqq b \\ \hline (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) & \leqq abc \end{array} \times$$

(de som van twee zijden van een driehoek is groter dan de derde; dus zijn de drie drietermen positief).

De betrekking (2) geeft het gelijkteken, dat alleen geldt, als $-a+b+c = a-b+c = a+b-c$ is; dus als $a = b = c$ is.

5e Opl. (van Harlaar). Uit $O_1 = O_2$ volgt:

$$\sin A \sin B \sin C = \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}(A+B) \sin \tfrac{1}{2}(A+C) \sin \tfrac{1}{2}(B+C).$$

Dus: $\prod \frac{\sin^2 {}^1/_2 (A+B)}{\sin A \sin B} = 1$, waaruit $\prod \frac{1-\cos(A+B)}{2\sin A \sin B} = 1$,

dus $\prod \left(1 + \frac{1-\cos(A-B)}{2\sin A \sin B}\right) = 1.$

Elk van de drie factoren in het linker lid is $\geqq 1$, dus zijn ze alle drie gelijk aan 1, dus $\cos(A-B) = \cos(A-C) = \cos(B-C) = 1$, dus $A = B = C$.

Men kan van de leerlingen m.i. niet vergen, dat ze ook maar één van de vorige oplossingen maken.

Tot zo ver afgemaakt, heb ik het handschrift aan Schogt gegeven, die er over gesproken heeft met zijn collega's, Dr. Haalmeijer en Dr. Rozenberg; deze hebben er het volgende aan toegevoegd.

6e Opl. (van Haalmeijer). Uit $\sin {}^1/_2\alpha \sin {}^1/_2\beta \sin {}^1/_2\gamma = {}^1/_8$ volgt $\sin {}^1/_2\alpha \{-\cos {}^1/_2(\beta+\gamma) + \cos {}^1/_2(\beta-\gamma)\} = {}^1/_4$

$$-\sin^2 {}^1/_2\alpha + \cos {}^1/_2(\beta+\gamma) \cos {}^1/_2(\beta-\gamma) = {}^1/_4$$
$$-2\sin^2 {}^1/_2\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = {}^1/_2$$
$$\cos\alpha - 1 + \cos\beta + \cos\gamma = {}^1/_2$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1{}^1/_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Stel nu $\beta = 90° - {}^1/_2\alpha - \varphi$ en $\gamma = 90° - {}^1/_2\alpha + \varphi$, dan is:

$$\cos\alpha + \cos(90° - {}^1/_2\alpha - \varphi) + \cos(90° - {}^1/_2\alpha + \varphi) = 1{}^1/_2$$
$$\cos\alpha + 2\cos(90° - {}^1/_2\alpha)\cos\varphi = 1{}^1/_2$$
$$1 - 2\sin^2 {}^1/_2\alpha + 2\sin {}^1/_2\alpha \cos\varphi = 1{}^1/_2$$
$$4\sin^2 {}^1/_2\alpha - 4\sin {}^1/_2\alpha \cos\varphi + 1 = 0$$
$$\sin {}^1/_2\alpha = \frac{4\cos\varphi \pm \sqrt{16\cos^2\varphi - 16}}{8}.$$

Men vindt dus alleen een bestaanbare waarde voor $\sin \alpha$, als $\cos \varphi = 1$ is; dus $\varphi = 0$; waaruit volgt $\beta = \gamma$; eveneens $\alpha = \beta$.

Van (4) af ook als volgt:

Van een gelijkbenige driehoek, waarvan de tophoek kleiner of groter dan 60° is, is de som van de cosinussen der hoeken kleiner dan $1\frac{1}{2}$.

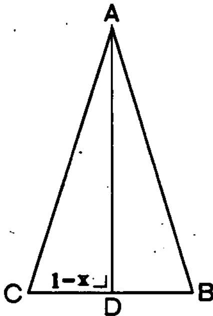


Fig. 4.

Als $\frac{1}{2}$ A < 30° is en AB = 2 gesteld wordt (fig. 4), is BD < $\frac{1}{2}$ AB, dus voor te stellen door $1 - x$. De cosinusregel geeft $(2 - 2x)^2 = 4 + 4 - 8 \cos \alpha$, dus $\cos \alpha = \frac{1 + 2x - x^2}{2}$;

$\cos \beta = \cos \gamma = \frac{1 - x}{2}$, dus $\Sigma \cos \alpha = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^2$ .... (5). Nu is:

$\cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma)$ .... (6); voor constante $\beta + \gamma$ is dit maximaal, als $\beta = \gamma$ is. Voor een driehoek met één constante hoek is $\Sigma \cos \alpha$ dus maximaal, als de andere hoeken gelijk zijn.

Daar een niet-gelijkzijdige driehoek minstens één hoek kleiner dan 60° heeft, volgt uit (5) en (6), dat een gelijkzijdige driehoek grotere $\Sigma \cos \alpha$ heeft dan elke niet gelijkzijdige. Voor een gelijkzijdige driehoek is $\Sigma \cos \alpha = 1\frac{1}{2}$ en uit $\Sigma \cos \alpha = 1\frac{1}{2}$ volgt dan de gelijkzijdigheid.

7e Opl. (van R o z e n b e r g). Het begin als bij de 2e oplossing.
$4 \cos^2 \frac{1}{2} (A + B) - 4 \cos \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B) + 1 = 0$.

Vat dit op als een vierkantsvergelijking in $\cos \frac{1}{2} (A + B)$; voor de bestaanbaarheid der wortels en dus voor de bestaanbaarheid van de driehoek onder de gegeven voorwaarde is nodig, dat de discriminant positief of nul is; dus

$$16 \cos^2 \tfrac{1}{2} (A - B) - 16 \geqq 0$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} (A - B) \geqq 1, \text{ dus } \cos \tfrac{1}{2} (A - B) = 1,$$

waaruit A = B; daarna volgt direct, dat de driehoek gelijkzijdig is, daar ook B = C moet zijn.

Ten slotte ontvingen we nog de volgende oplossing:

8e Opl. „Het product van de sinussen van twee hoeken, waarvan de som constant is, is maximaal, als die twee hoeken gelijk zijn. Zolang dus in een driehoek twee hoeken ongelijk zijn, is het product

der sinussen van de hoeken of van de halve hoeken niet maximaal. Het product sin ½ A sin ½ B sin ½ C is dus maximaal, als $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, d.w.z. dat het dan gelijk is aan ⅛. De gelijkheid der hoeken van △ ABC is dus de noodzakelijke voorwaarde voor de gelijkheid van O_1 en O_2."

Deze ogenschijnlijk eenvoudige en voor de hand liggende redenering is niet afdoende en eist een aanvulling, die buiten het bereik van den candidaat ligt. Uit de mogelijkheid, het product p van de sinussen van drie scherpe hoeken α, β en γ (of van drie hoeken tussen 0° en 180°) met constante som te vergroten door twee van de hoeken door hun gemiddelde te vervangen, volgt, dat p niet maximaal is, als de drie hoeken niet alle gelijk zijn. Daaruit volgt echter nog niet zonder meer, dat p wel maximaal is, als de drie hoeken gelijk zijn. We mogen zonder nadere overweging slechts beweren, dat, *als p een maximumwaarde kan aannemen,* dit het geval zal zijn, als de drie hoeken gelijk zijn. Hoe zou echter de candidaat moeten besluiten tot het bestaan van een maximale waarde van sin ½ A sin ½ B sin ½ C? De meer gevorderde kan natuurlijk als volgt redeneren. Het product sin ½ A sin ½ B sin ½ C is een continue functie van A, B en C en bereikt dus in het *gesloten* waardengebied (A, B, C), bepaald door $A + B + C = 180°$, $0 \leqq A$, $0 \leqq B$, $0 \leqq C$, een maximale waarde. Daar deze maximale waarde zeker niet bereikt wordt, als een van de hoeken nul is, heeft het product ook in het *open* gebied, bepaald door $A + B + C = 180°$, $0° < A$, $0° < B$, $0° < C$ een maximum. Deze redenering kan van den candidaat natuurlijk niet gevergd worden. De meesten van hen zullen het wel als vanzelfsprekend aannemen, dat er een maximale waarde van sin ½ A sin ½ B sin ½ C is. Echter moet ze dit eer ten kwade dan ten goede geduid worden: het wiskunde-onderwijs moest ze juist geleerd hebben, met de vanzelfsprekende „waarheden" voorzichtig te zijn. Trouwens het product sin ½ A sin ½ B sin ½ C heeft geen minimale waarde, in strijd met wat menigeen ook als vanzelfsprekend zou aannemen.

Er zit dus niet veel anders op, dan te bewijzen, dat voor een gelijkzijdige driehoek het meergenoemde product werkelijk groter is dan voor een niet gelijkzijdige. Wil men dat doen met behulp van de onbepaald voortgezet gedachte vervanging van twee ongelijke hoeken door hun gemiddelde, dan moet men zich beroepen op de volgende overwegingen. Zijn na de eerste vervanging de halve

hoeken van de driehoek $30° + \alpha$, $30° - \frac{1}{2}\alpha$ en $30° - \frac{1}{2}\alpha$ ($\alpha \neq 0$), dan zijn ze na de volgende stap (afgezien van de volgorde) $30° - \frac{1}{2}\alpha$, $30° + \frac{1}{4}\alpha$ en $30° + \frac{1}{4}\alpha$. Vervolgens worden ze $30° + \frac{1}{4}\alpha$, $30° - \frac{1}{8}\alpha$ en $30° - \frac{1}{8}\alpha$. Na n keer worden ze $30° + (-\frac{1}{2})^{n-1}\alpha$, $30° + (-\frac{1}{2})^n\alpha$ en $30° + (-\frac{1}{2})^n\alpha$.

Van elk van de halve hoeken is dus de limiet voor onbepaald aangroeiende n gelijk aan 30°.

Daar $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$ een continue functie is van A, B en C, heeft dit product bij onbepaald aangroeiende n de limiet $\sin^3 30°$, dus $\frac{1}{8}$. Daar nu dit product toeneemt bij aangroeiende n, is het voor elke n kleiner dan zijn limiet bij onbepaald toenemende n. Dus is de oorspronkelijke waarde van $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$ voor de niet gelijkzijdige driehoek ABC kleiner dan $\frac{1}{8}$.

Veel eenvoudiger wordt het bewijs, als we bij vergelijking van $\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$ ($\triangle$ ABC niet gelijkzijdig) met $\sin^3 30°$ aan beide producten nog een factor $\sin 30°$ toevoegen (zie de 3e oplossing). Dan is het eerste product in twee stappen te vergroten tot het tweede door telkens twee paar hoeken door hun gemiddelden te vervangen.

P. WIJDENES.

EEN EN ANDER OVER DE DEFINITIES

DOOR

T. EHRENFEST—AFANASSJEWA.

---

1. Menige leeraar zal wel het volgende ondervonden hebben: men moet de leerlingen in een nieuw hoofdstuk van de exacte wetenschappen introduceeren; er valt allereerst een reeks fundamenteele begrippen te verklaren, en natuurlijk wil men dit zoo precies mogelijk doen.

Spoedig bemerkt men, dat men zich met geen van de, in de schoolboeken voorkomende, definities vereenigen kan: alle laten zij iets te wenschen over, alle beroepen zij zich op iets, dat ongedefinieerd blijft.

„De *massa* van een lichaam is de hoeveelheid stof die het bevat" — zoo iets zou misschien een eenigszins bepaalde inhoud hebben, als alle lichamen in elk opzicht homogeen waren; men zou dan toegeven, dat een tweemaal zoo groot lichaam ook tweemaal zooveel „hoeveelheid stof" bevatte. Maar wat wordt met „gelijke hoeveelheid stof" in twee heterogene lichamen bedoeld?

Als men zich op de vergelijking „kracht is gelijk massa maal versnelling" beroepen wil, moet men de begrippen „versnelling" en „kracht" verklaren.

„Een *rechte* is de kortste afstand tusschen twee punten" — weet men dan reeds, hoe men afstanden langs willekeurige lijnen met elkaar moet vergelijken? Wat is een „afstand"?

„*Congruente figuren* zijn figuren, die van elkaar niet te onderscheiden zijn" (een dergelijke definitie heb ik werkelijk in een van de laatst uitgekomen geometrieboeken gevonden) — hoe moet men echter twee figuren überhaupt met elkaar vergelijken?

Als men zelf probeert het beter te doen, begrijpt men eerst recht, hoe hopeloos de zaak is. Inderdaad: men wil een goede definitie geven van de vorm: „een A is een B, die de eigenschap bezit een C

te zijn". Maar dan moeten klaarblijkelijk eerst de begrippen B en C gedefinieerd zijn, hetgeen aantoont dat het een zaak zonder eind is.

Men ziet in, dat men er principieel op aangewezen is om een — zij het ook heel kleine — groep van begrippen als *„fundamenteele* begrippen" aan te nemen, die men niet volgens het bovenstaande onderverdeelings-schema kan definieeren; alle andere kunnen dan tot deze fundamenteele begrippen teruggebracht worden; dat zijn dan *„afgeleide"* begrippen.

Hoe moeten echter de grondbegrippen zelf geïntroduceerd worden? — De laatste tijd beginnen wel de quasi-definities van de boven-geciteerde soort uit de school- en leerboeken te verdwijnen. In menig boek staat er dan ongeveer dit: „wat A, B, C, ... zijn, weet iedereen uit eigen ervaring". Bijgevolg schijnt de geheele strenge wetenschap, waarin men (zooals b.v. in de geometrie) terwille van de grootst mogelijke strengheid zelfs volkomen evidente stellingen bewijst, opgebouwd te zijn op het persoonlijke ongecontroleerde inzicht van den enkeling, dat hij uit zijn persoonlijke ervaring gewonnen heeft.

Is dat niet eenigszins riskant? Bestaan er twee menschen, die ieder woord, dat zij gebruiken, — zonder een speciale afspraak — precies in dezelfde beteekenis gebruiken?

2. Twee zeer verschillende vragen zijn er: *a.* hoe moet men bereiken, dat een nieuw woord voor een beginneling een voldoende bepaalde en levende inhoud krijgt, opdat hij het bij de bestudeering van het nieuwe vak juist kan gebruiken, en: *b.* wat omvat het betreffende begrip bij nadere beschouwing voor dengene, die op het gegeven gebied reeds thuis is en nu eens alles, wat hij daarover weet, in een helder, logisch, precies beeld wil samenvatten.

Wat hier volgt, heeft eigenlijk betrekking op de tweede vraag; toch geloof ik, dat het daarin verkregen inzicht ook bij het onderricht, zij het ook indirect, van dienst kan zijn.

Zelfs onder de eminente mathematici zijn er, die het streven naar de logische strengheid in de uitbeelding van hun vak zeer weinig apprecieeren, daar zij het voor een bezigheid aanzien, die onbelangrijk is voor de zakelijke uitbreiding van ons weten, voor een soort naleven van de „goede manieren", voor zoo iets als het voorschrift om visch zonder mes en asperges met de vingers te eten.

Een dergelijk gedrag kan wel door de traditioneele manier van

schoolonderricht gesuggereerd zijn: aan de éene kant wordt er in de geometrie wèl de nadruk op logische strengheid gelegd en dàt op een oogenblik, dat de leerlingen de juiste motieven daarvoor niet kunnen meevoelen; aan de andere kant worden de veel gecompliceerder problemen van de physica en van de overige vakken zonder de minste logische scrupules behandeld, en nooit leidt dit tot eenige merkbare katastrophe.

Ondertusschen is een afwijzende beoordeeling van de logische onderzoekingen zeer eenzijdig. De analyse van de grondslagen van de geometrie helpt inderdaad niet mee tot het ontdekken van nieuwe stellingen, maar het is niet waar, dat zij niets tot de uitbreiding van onze kennis zou hebben bijgedragen.

Tot onze *kennis der natuur* heeft zij wel dit bijgedragen, dat wij thans andere mogelijkheden zien om ons de ruimte te denken, dan door de geometrie van Euclides voorgeschreven wordt, en dit effent de weg voor de nieuwe mechanische en kosmologische opvattingen, die door Einstein's gravitatie-theorie zijn ingevoerd.

Onze *methodologische* inzichten heeft zij in de eerste plaats in dit opzicht verder gebracht, dat nu het begrip „axioma" gepreciseerd is; dat het probleem van het bewijzen van de logische onafhankelijkheid van de axioma's op de voorgrond is geplaatst en dat de methoden om dit op te lossen uitgewerkt zijn. Men vindt thans in de geometrie een voorbeeld bij uitnemendheid van een overzichtelijke uiteenzetting van een gebied van onderzoek, waarin iedere volgende hypothese, die uit het voorgaande niet logisch afgeleid kan worden, duidelijk herkend wordt, en de vertrouwdheid met een dergelijke manier van voorstellen is werkelijk ook op ieder ander gebied niet overbodig, in de eerste plaats voor iemand, die op de hoogte wil komen van een nieuwe gecompliceerde theorie.

Tenslotte hangen ook de *kennistheoretische* vragen ten nauwste samen met de logische analyse van de grondslagen.

Naar het mij toeschijnt hoeven dergelijke onderzoekingen niet voor ieder *scheppend* wetenschappelijk mensch van directe toepassing te zijn, de *leeraar* in het betreffende vak mag deze kennis echter in geen geval ontberen. Hij moet weten, welke omstandigheden de aanleiding zijn geweest voor die onderzoekingen en wat hun uitkomsten zijn. Dan zou hij kunnen overwegen òf en wanneer de motieven van de hierop betrekking hebbende probleem-stelling aan de leerlingen onder oogen gebracht kunnen worden; dan zou hij

met grootere zekerheid de uiteenzetting van de stof in de schoolboeken kunnen beoordeelen en de schijnheilige strengheid van de ware kunnen onderscheiden. Maar tevens zou hem de logische — zoo formeele en zoo „geleerde" — analyse menige wenk geven voor het begrijpen van de psychologische moeilijkheden van de leerlingen, want meestal struikelen de leerlingen juist op dat punt, waar de zaak den leeraar zelf weliswaar bekend is, maar logisch niet geheel duidelijk.

Daarom schijnt het mij niet overbodig te zijn, als ik hier het hierboven opgeworpen probleem van de definitie van de grondbegrippen wat nader bespreek, en wel aan de hand van de geometrie.

3. Omdat de definities voor de uitbreiding zelf van de zakelijke geometrische kennis onbeduidend waren, werd haar herziening in de geometrie steeds uitgesteld, hoewel men de ontoereikendheid van de definities bij Euclides zelf reeds lang bemerkt had. De vraag werd urgent, toen men met het andere logische probleem — met de onbewijsbaarheid van het parallelen-axioma — klaar kwam en nu een zoo volledig mogelijk systeem van grondslagen voor de Euclidische geometrie wenschte samen te stellen.

Hoe introduceeren nu de laatste onderzoekers de grondbegrippen van de geometrie?

De zuiverste positie vinden wij daartegenover ingenomen door D. Hilbert in *„Grundlagen der Geometrie."* Op het eerste gezicht kan deze zeer verrassend schijnen: Hilbert stelt axioma's op, waarin de woorden „punt", „rechte", „vlak", „bij elkaar hooren", „liggen tusschen", „congruent zijn" op bepaalde verschillende manieren gedeclineerd en geconjugeerd worden, en . . . . zegt eenvoudig niets over de beteekenis van deze termen; wat men met hen bedoelt, moet juist uit deze axioma's blijken!

Dus: niet definities *en* axioma's, maar de *axioma's alleen* moeten nu als de volledige grondslag van een systeem dienen.

Bij nadere beschouwing is echter deze weg tot het begrijpen van de woorden niet zoo nieuw: op precies dezelfde manier hebben wij voor een groot deel onze moedertaal leeren verstaan en gebruiken, alleen gebeurde dat onbewust en daarom niet altijd met even goed resultaat.

Inderdaad, hoe leert men spreken?

Eerste methode: de eerste woorden worden met bepaalde zintuigelijke waarnemingen geassocieerd; men wijst het kind op dingen en situaties, en dit gaat gepaard met overeenkomstige woorden; zoo leert het kind zulke woorden als „melk", „bal", „tafel", „op" (de tafel), „onder (de tafel), „loopen", „blij zijn" enz.

Tweede methode: een reeks andere woorden wordt volgens het schema „A is een B, die een C is", verklaard.

Derde methode: hoeveel woorden raadt het kind niet, zonder dat iemand het hem speciaal uitlegt, eenvoudig uit hun gebruik in het een of andere gesprek! Sommige daarvan kunnen ook nauwelijks anders verklaard worden: „maar", „in zooverre als" . . . .

Op deze laatste methode is men ook aangewezen als men een uitdrukking uit een vreemde taal, die niet precies vertaald kan worden, aan iemand wil verklaren: men geeft verschillende zinnen, waarin zij voorkomt, en uit de rol, die zij in de bouw van die zinnen speelt, maakt men op, wat men met haar wil uitdrukken.

Om beter te begrijpen, wat met dit definieeren door axioma's bedoeld wordt, vervange men de al te bekende woorden „punt", „rechte", ... ,: „congruent" . . . . . resp. door de voorloopig nietszeggende teekens: A, B, ...; α, β, γ . . . ., en schrijve daarmee de axioma's van Hilbert op. Men krijgt dan stellingen van ongeveer de volgende gedaante:

I. Bij elke twee A (A^1 en A^2) is er steeds een B, die tot elk der beide A in de relatie α staat.

I,2. Bij elke twee A (A^1 en A^2) is er niet meer dan één B, die tot de beide A in de relatie α staat enz..

III,1. Als A^1 en A^2 in de relatie α tot een B^1 staan, en verder A^3 in de relatie α hetzij tot dezelfde B, hetzij tot een andere B (B^2) staat, dan kan men steeds een A (A^4) vinden, die in de relatie α tot dezelfde B, als A^4 staat, zoodat D (A^1 A^2) in de relatie γ tot D (A^3 A^4) staat, enz. enz.

En laat men nu eens probeeren, terwijl men deze stellingen tesamen als grondslag neemt, uit de verschillende volgende in dezelfde teekens geschrevene speciale veronderstellingen verdere stellingen af te leiden.

Vervangt men de teekens A, ... γ weer door de overeenkomstige woorden, dan zal men volkomen juist de stellingen van de ruimteleer krijgen.

Is het echter makkelijk zonder deze omzetting uit te maken, om welke dingen en relaties het gaat?

4. Natuurlijk zal het bij niemand opkomen om dit soort definities op school in te voeren. Men zal hen te moeilijk, „te abstract voor den beginneling" vinden. Zij zijn echter nog erger dan dat; zij zijn namelijk werkelijk te abstract, d.w.z. te *algemeen:* zij zijn geheel niet toereikend om die begrippen in vast te leggen, *die wij werkelijk aàn deze woorden verbinden,* en aan onze leerlingen moeten bijbrengen!

Uit deze axioma's zelf kan men niet eens opmaken, of het gaat over de ruimteleer, of misschien over erfelijkheidswetten of over handelsverdragen in het een of andere nieuwe land, of over nog iets anders. Zelfs als men zich tot zuiver geometrische voorwerpen wil beperken, vindt men daarbij niet slechts één enkel systeem van dingen, die resp. als „punten", „rechten" en „vlakken" *in de beteekenis van deze axioma's* kunnen dienen, maar een oneindige hoeveelheid van dergelijke systemen. En dit ligt aan het feit, dat door deze axioma's niet alle kenmerken van de ons bekende punten, rechten en vlakken worden vastgelegd, maar slechts een deel ervan, namelijk *hun wederzijdsche relaties.*

Een eenvoudig voorbeeld ter illustratie van deze stand van zaken levert het volgende systeem:

Men stelle zich voor alle cirkels, die door één en hetzelfde punt 0 gaan, waarbij echter het punt 0 zelf niet tot het systeem gerekend wordt („uitgestoken"!); in plaats van met volledige cirkels hebben wij dus met niet gesloten („open") lijnen te doen. De rechten, die door 0 gaan, moeten daarbij als cirkels met oneindig groote straal beschouwd worden; ook hun moet het punt 0 ontbreken, daarentegen moeten hun beide deelen in het oneindige door een gemeenschappelijk „oneindig ver" punt tot één enkele, in het punt 0 open zijnde lijn, vereenigd worden.

Een dergelijk systeem van lijnen krijgen wij als afbeelding van alle rechten van de ruimte, als wij de bekende „transformatie door reciproke stralen" aan een bol met het middelpunt 0 op de ruimte toepassen.

Daarbij gaan twee elkaar snijdende rechten in twee elkaar snijdende cirkels over, en deze hebben — let wel — slechts één snijpunt, daar het tweede altijd het punt 0 is, dat weggedacht wordt; twee

evenwijdige lijnen gaan in twee cirkels over, die elkaar in het punt 0 raken, — die dus in ons systeem geen punt gemeen hebben; vlakken gaan in bollen over, die klaarblijkelijk alle door het punt 0 gaan.

Laten wij nu afspreken om iedere cirkelboog die lengtemaat toe te kennen, die de door hem afgebeelde lijn (in de een of andere bepaalde eenheid uitgedrukt) bezit, en om onder een „hoek" tusschen twee snijdende cirkels de hoek tusschen hun raaklijnen in het snijpunt te verstaan. (Deze hoek is, zooals men weet, gelijk aan de hoek tusschen de afgebeelde rechten).

Dan krijgen wij een systeem van objecten, die aan alle axioma's van H i l b e r t voldoen, en waarin als punten weliswaar de gewone punten optreden, maar waarin de rol van de rechten door cirkels en de rol van de vlakken door bollen wordt vervuld, en waarin als „congruente lijnen" en „congruente driehoeken" kromlijnige figuren dienst doen, die bovendien in de gewone beteekenis heelemaal niet congruent zijn. Maar ook iedere andere punt-transformatie, waarbij continue lijnen in continue overgaan, levert, bij een goede afspraak omtrent de maatgetallen van lijnen en hoeken, een systeem van dingen, die voldoen aan dezelfde axioma's.

Men zou ook andere systemen kunnen aanhalen, waarbij de rol van de vlakken, rechten en punten niet door vlakken, resp. lijnen en punten, maar door andere geometrische of arithmetische objecten wordt vervuld.

5. Wij komen zoo tot de volgende inzichten:

De grondbegrippen van een wetenschap kunnen door dat systeem van axioma's gedefinieerd worden, waaruit alle verdere stellingen van deze wetenschap als logische gevolgtrekkingen kunnen worden afgeleid.

Het systeem van de aan deze grondbegrippen beantwoordende dingen wordt daarbij slechts in zooverre gedefinieerd, als daardoor hun onderlinge relaties worden vastgelegd.

Deze methode van definieeren is in het algemeen niet ondubbelzinnig: het is mogelijk dat er meer dan *één* systeem van dingen is, waarvan de relaties door stellingen van dezelfde formeele structuur beschreven kunnen worden, d.w.z.: één en hetzelfde systeem van axioma's kan meer dan één *„representant"* bezitten.

6. Zoo komen echter twee vragen op: wat hebben wij dan eigen-

lijk voor de ruimteleer gewonnen met de definities van Hilbert, als wij toch niet weten, aan welke dingen wij daarbij moeten denken? en: moet men het streven naar een nader preciseeren van de begrippen, die ons interesseeren, werkelijk opgeven?

Wel, voor het doel, dat Hilbert voor oogen had, behoeven de objecten van zijn onderzoekingen ook niet nader dan zoo gedefinieerd te worden. Zijn doel was immers: de *logische structuur* van de ruimteleer, en wel van de ruimteleer van Euclides, zoo precies mogelijk na te gaan. Als daarbij gebleken is, dat een geometrie-boek op meer dan één systeem van objecten kan toegepast worden, dan mag men daarvoor den onderzoeker niet verantwoordelijk stellen; overigens is dit ook heusch geen bedroevend resultaat — integendeel!

Uit deze stand van zaken komt echter nog een bijzonder voordeel voor het onderzoek van het systeem van axioma's zelf voort. Een essentieel punt van een dergelijk onderzoek is namelijk het bewijs, dat ieder verder axioma A, dat men aan de reeds geaccepteerde n axioma's toevoegt, een werkelijk axioma is, d.w.z. een stelling, die aan twee voorwaarden voldoet: ten eerste mag zij niet in strijd zijn met de eerste n axoma's; ten tweede mag zij niet uit deze volgen — hetgeen inhoudt, dat haar ontkenning, de stelling A, ook niet in tegenspraak is met dezelfde n eerste axioma's.

Evenals met een alibi is het ook hier alleen dan overtuigend, als men een positief bewijs voor deze verhoudingen geeft. En dan komt het bestaan van meerdere representanten, van één systeem van axioma's ons te hulp: van ieder van de beide systemen van axioma's: van het systeem S, dat de stelling A, en van het systeem $\bar{S}$, dat inplaats daarvan de stelling $\bar{A}$ bevat, zet men elk één representant neer, die zoo goed te overzien is (en die onafhankelijk van het systeem van dingen, dat nu onderzocht moet worden, bestudeerd is) dat men aan zijn bestaan en derhalve aan zijn betrouwbaarheid niet kan twijfelen. Zoo krijgt men de zekerheid dat de stelling A logisch onafhankelijk is van de eerste n axioma's.

7. Al hebben wij ingezien, dat voor de logische fundeering van de geometrie het definieeren van de grondslagen door het systeem van axioma's van Hilbert voldoende is, toch kunnen wij ons er niet mee tevreden stellen, als het gaat om het practische gebruik van de geometrie.

Dat systeem van axioma's is weliswaar een volledige basis voor alle verdere *geometrische stellingen,* maar *als beschrijving van de karakteristieke eigenschappen van de ruimte, waarin wij leven,* is het niet volledig: als men zegt, dat de lichtstraal „rechtlijnig" is, dat een blad papier langs een „rechte" lijn gevouwen kan worden, dan bedoelt men daarmee een zeer bepaalde figuur, maar in het systeem van axioma's van H i l b e r t is geen aanknoopingspunt aanwezig, om deze onder de oneindig vele denkbare representanten van de „rechte" op te sporen.

Ondertusschen is de belangstelling van de menschen voor de stellingen van de geometrie slechts daarom zoo groot, omdat een zekere representant van de geometrie een zoo gewichtige rol in de natuurverschijnselen speelt — en dien moeten wij hebben!

8. Dat wij een rechte op het eerste gezicht van iedere andere lijn kunnen onderscheiden, ligt blijkbaar aan het feit, dat wij specifieke zintuigelijke indrukken van haar krijgen, m.a.w. aan haar betrekking tot ons lichaam. Als wij echter de kenmerken van de figuren in woorden willen beschrijven, moeten wij het subjectieve element elimineeren en door objectieve betrekkingen tusschen ruimtelijke en andere physische kenmerken vervangen.

Daarbij moeten wij ons van een serie woorden bedienen, die aan de natuurkunde ontleend zijn, maar die nog nooit zeer streng gedefinieerd zijn. Nu kan echter nauwelijks éénige duidelijke definitie van een natuurkundig begrip zonder er geometrische begrippen bij te halen tot stand komen — men moet niet uit 't oog verliezen, dat al het physische gebeuren zich in de ruimte afspeelt (niet zonder reden loopen ook alle natuurkundige metingen — zelfs tijdmetingen — op het aflezen van geometrische maten uit!) De definieering van de natuurkundige begrippen die wij noodig hebben, zou dus niet aan die van de geometrische begrippen vooraf kunnen gaan. Er blijft dus niets anders over dan een uitgebreider systeem van axioma's op te stellen, waarin naast de geometrische ook de noodige natuurkundige termen voorkomen, die dan juist door dit systeem van axioma's mede gedefinieerd zijn.

Men zou op dit oogenblik niet mogen zeggen of een dergelijk systeem wel uit een eindig aantal axioma's zou bestaan. Misschien wel. Maar ook dan nog zou het een reusachtig werk zijn, dat tot

nu toe nog door niemand volbracht is, en zeker is het niet het doel van dit korte artikel om zoo iets op te bouwen.

Toch zou men nu reeds een bescheidener probleem kunnen aanpakken, dat toch een zekere vooruitgang in het duidelijk maken van onze begrippen zou beteekenen: *de grenzen van het ongedefinieerde* hierdoor wat te *verschuiven,* dat men tenminste eenige natuurkundige begrippen, die het dichtst bij de geometrie staan, preciezer zou analyseeren. Dit zal in hetgeen volgt, geprobeerd worden. Wij willen de physische representanten van de begrippen „congruentie" en „rechte" onderzoeken.

9. Als een voorwerp zich van ons verwijdert, zien wij het kleiner worden, maar wij zijn overtuigd, dat het „in werkelijkheid" „hetzelfde" blijft.

Daarmee wordt de gangbare opvatting uitgedrukt, dat er een absoluut, aan de ruimte eigen criterium zou zijn, met behulp waarvan men de afmetingen van figuren, die zich op verschillende plaatsen bevinden, met elkaar zou kunnen vergelijken.

Dienovereenkomstig doet het eenigszins vreemd aan, als men voor het eerst de verschillende representanten van Euclides' systeem van axioma's leert kennen en daarbij van de *afspraken* omtrent de maatgetallen van lengten en hoeken hoort. Men is geneigd dergelijke representanten als „conventioneel" te stellen tegenover de goede bekende „echte" representanten.

Als wij echter naar een absoluut criterium zoeken voor het vergelijken van lengten en hoeken, ontdekken wij, dat zoo iets niet bestaat, maar dat wij eerder ook bij ons traditioneele meten door een *overeenkomst* geleid worden, en wel door een zoodanige als gesuggereerd wordt door het gedrag van physische lichamen bij verandering van plaats.

Men weet reeds lang, dat het vergelijken van twee temperatuursprongen („temperatuurafstanden") op twee verschillende temperatuurniveau's, („op twee verschillende plaatsen van de temperatuur-ruimte") slechts op een afspraak kan berusten, want twee temperatuursprongen, b.v. 1) van 0° C. tot 1° C. van een kwikthermometer en 2) van 50° C. tot 51° C. *dito),* die aan twee *gelijke* uitzettingen van een kwikzuil beantwoorden, veroorzaken bij een spiritus-zuil twee verlengingen van *ongelijke* grootte.

Men wordt zich echter niet zoo snel van de conventionaliteit bij

het vergelijken van ruimtelijke afstanden bewust, en dit ligt aan het feit, dat alle stoffen, waaruit men de maatstaven vervaardigt, zich op verschillende plaatsen merkbaar-gelijk gedragen: twee maatstaven, die op één plaats even lang waren, blijven ook op iedere andere plaats even lang . . . . tenminste zij zijn daar niet opvallend anders . . . . of wel men vindt steeds een speciale oorzaak voor hun eventueele ongelijkheid; dan, maar ook slechts dan, zegt men, dat zij uitgezet (en wel ongelijk uitgezet) of verkort zijn.

Het *aan elkaar gelijk blijven* van heterogene maatstaven bij verandering van plaats is hetgeen ons de illusie geeft van een *aan zich zelf gelijk blijven* in een bijzondere „absolute" beteekenis.

In werkelijkheid kunnen wij echter slechts dit constateeren: twee ruimte-deelen zijn voor ons „gelijk" of „congruent", als één en hetzelfde physische lichaam, en wel een *vast* lichaam, in beide precies past; twee lijn-afstanden zijn „even lang" als één en dezelfde op een vast lichaam afgeteekende lijn met elk van beide kan samenvallen.

Als wij nu de ons alleen interesseerende representant van het begrip „congruentie" nader analyseeren, dan moeten wij eerst tot klaarheid komen omtrent het begrip *„vast lichaam"*.

10. Vreemd genoeg verwerpt men gewoonlijk de poging om dit probleem aan te pakken; men beroept er zich met voorliefde op, dat er in de natuur geen werkelijk vaste lichamen zijn. Op deze manier gaat men in een amusante logische cirkel rond: men loochent het bestaan van iets, waarvan men niet weet — en niet weten wil — wat het eigenlijk zou moeten zijn. Dit is des te merkwaardiger, omdat men er niet voor terugschrikt de talrijke andere in de natuurkunde voorkomende begrippen te definieeren, hoewel men er zeker van is, dat de overeenkomstige dingen, exact genomen, ook nooit in de natuur voorkomen (b.v. de gelijkmatige beweging). — Maar in elk gegeven geval is men toch in staat een vast lichaam van een niet-vast te onderscheiden!

Wat wij hier willen, is — zooals gezegd — geen tot in ieder woord gepreciseerde definitie, maar een analyse van dat, waarop dan wel deze onderscheiding van ons berust. Wij zullen het niet vermijden om woorden te gebruiken, die ongedefinieerd blijven, en waarvan de beteekenis wordt verondersteld bekend te zijn. Alleen mag in onze gedachtengang geen logische cirkel voorkomen.

De tot nu toe mij bekende pogingen om het begrip „vast lichaam" te definieeren, loopen op de bewering uit, dat een vast lichaam zijn afmetingen en vorm onder alle omstandigheden onveranderd behoudt. Wij komen daar natuurlijk niet verder mee, want wij gaan van het inzicht uit, dat het meten en indentificeeren van de vorm zelf op het begrip „vast lichaam" berusten.

Gelukkig is het echter heelemaal niet waar, dat wij ons in de praktijk van de vastheid van een lichaam met behulp van opmetingen overtuigen; veeleer gebruiken wij een experiment, dat geen metrische elementen bevat en dat dikwijls zelfs in de allerprimitiefste uitvoering reeds toereikend is: wij probeeren het betreffende lichaam samen te drukken en voelen of het meegeeft. Dit experiment kan ook in een objectieve vorm uitgevoerd worden, en dan kan men het ongeveer op de volgende manier schematiseeren:

1. Het te onderzoeken lichaam K brengen wij met een willekeurig ander „Standaardlichaam" P in aanraking en op elk van beide teekenen wij een paar punten A, B, resp. A', B', waar zij elkaar aanraken. Dus: A coïncideert met A', B met B'.

2. Wij voeren twee manipulaties uit, die „drukken" en „spannen" van het lichaam K genoemd worden, waarbij wij het zoo inrichten dat de punten A en A' blijven coïncideeren, en wij letten op of daarbij de punten B en B' ook nog coïncideeren. Is dat het geval, dan noemen wij het lichaam K „vast".

Bij dit schema behoort een reeks aanvullende opmerkingen:

a. De manipulaties „drukken" en „spannen" moeten nader gedefinieerd worden en wel zoo, dat daarbij nergens gebruik gemaakt wordt van die begrippen, voor welker definitie het begrip „vast lichaam" zelf noodig is. Hier kunnen wij het wegens plaatsgebrek niet doen; het schijnt echter werkelijk mogelijk te zijn het zonder logische cirkel te volbrengen.

b. Men moet de zekerheid hebben, dat, ofschoon druk en spanning *werkelijk plaats vonden,* de verschuiving van punt B van het lichaam K t.o.v. punt B' van het lichaam P *desalniettemin* is uitgebleven. Voor dit doel kan men contrôle-lichamen gebruiken, die op dezelfde voorwaarden, waarin wij bij het onderzoek het lichaam K brengen, wèl met een verschuiving reageeren.

c. Om de zekerheid te vergrooten, dat de bewuste manipulaties alleen op het lichaam K en niet tegelijkertijd ook op P werkten, of dat niet toevallig juist op het oogenblik van het experiment onbe-

kende invloeden het uitblijven van de relatieve verschuiving van de punten B en B′ bewerkten, kan men het lichaam P achtereenvolgens door een reeks andere standaardlichamen vervangen en ieder experiment op verschillende tijden herhalen.

d. Opgemerkt dient te worden, dat het geen vereischte is, dat het standaardlichaam zelf vast is: het moet slechts aan de eisch voldoen, dat zijn punten A′, B′ t.o.v. de punten A, B van het lichaam K niet verschuiven, zoolang er op dit lichaam K niet met druk of spanning gewerkt wordt.

e. Om zeker te zijn, dat alle deelen van het lichaam K vast zijn, moet men zich natuurlijk niet tot één enkel paar punten A, B, beperken.

f. Bij al dergelijke onderzoeken — zooals trouwens bij ieder experimenteel onderzoek — blijft een element van onzekerheid. Principieel kunnen wij nooit ontkennen, dat er géén invloeden geweest zijn, die een lichaam, dat gecomprimeerd kan worden, abusievelijk vast doen schijnen. Dit zwakke punt ligt echter niet in onze definitie van het begrip „vast lichaam", maar aan het feit, dat wij ons kunnen vergissen bij de beoordeeling of een gegeven lichaam aan dit begrip beantwoordt.

g. Ook kan het niet als een kritiek op de definitie opgevat worden, dat wij toegeven, dat er in de natuur geen zoodanige lichamen zijn, als wij zoojuist gedefinieerd hebben. Wel mag men echter vragen welk verband er dan is tusschen dit begrip en al datgene waarvoor wij de definitie hebben opgesteld. Het antwoord ligt voor de hand: weliswaar zijn er geen lichamen die in de boven beschreven beteekenis vast zijn, maar er zijn vele lichamen, die wij bij minder preciese beschouwing voor zoodanig houden, en juist dergelijke lichamen zijn het die bij ons het idee van het vergelijken en identificeeren van geometrische figuren deden opkomen. Tevens zijn deze ook de werkelijke dragers van alle onderzoekingen omtrent de ruimtelijke betrekkingen in de natuurverschijnselen.

Ook hier laten wij, kortheidshalve, een meer preciese beschrijving achterwege, maar ik geloof de verzekering te mogen geven: men kan zonder in een logische cirkel rond te gaan een definitie van „*bijna* vast lichaam" geven en ook van de „*graad* van vastheid".

h. Een werkelijke verbetering moet echter nog aan onze definitie van het vaste lichaam aangebracht worden: een lichaam K, dat het bovenstaande onderzoek betreffende vastheid met een bevredigende

nauwkeurigheid heeft doorstaan, kan onder omstandigheden zonder aanwezigheid van druk of spanning toch nog merkbare verschuivingen t.o.v. het standaardlichaam vertoonen. Wij zeggen dan, dat er andere factoren op inwerken (verwarming, magnetiseering etc.).

Een volledige definitie van het vaste lichaam zou dus als volgt moeten luiden: *de punten* A, B *van een „ideaal vast lichaam"* blijven *onder alle omstandigheden ten opzichte van de punten* A′, B′ *van een standaardlichaam onbewegelijk, als slechts dit standaardlichaam vrij blijft van de op het lichaam* K *werkende invloeden.*

Het inzicht, dat lichamen, die aan de eerste definitie van het vaste lichaam tamelijk goed beantwoorden, toch niet voldoen aan deze verbeterde definitie, verhindert ons niet om dergelijke lichamen voor geometrische identificaties op verschillende plaatsen te gebruiken. Wij doen dit, daar wij aannemen dat het ons steeds mogelijk is om hun vroegere gedaante terug te vinden, die ze zouden hebben, als op de nieuwe plaats de storende factoren ontbraken. Met het oog hierop moet men natuurlijk aannemen, dat ons op de tweede plaats dergelijke factoren niet ontgaan, en dat hun werking op de gedaante van het gebruikte lichaam op alle plaatsen hetzelfde is, nadat wij deze op de eerste plaats goed bestudeerd hebben.

Of al deze veronderstellingen in ieder gegeven geval opgaan, is een andere zaak. Voor ons komt het slechts hier op aan: dat dergelijke onderstellingen werkelijk ten grondslag liggen aan iedere geometrische identificatie; dat wij door onze beschrijving werkelijk die essentieele deelen van de onderzoekingen hebben naar voren gebracht, die een lichaam in onze oogen „vast" doen schijnen, en dat deze essentieele trekken in principe tot loutere *coïncidenties* van punten teruggebracht kunnen worden, en op geen enkel aan de ruimte zelf inherent maat- of congruentiebegrip berusten.

11. Wij kunnen nu de volgende definities introduceeren:

1. *Congruente* figuren zijn figuren, die met één en dezelfde, op een vast (in de verbeterde beteekenis) lichaam afgeteekende, figuur kunnen samenvallen.

2. Een geometrische figuur *„zonder verandering overbrengen"* of *„bewegen"* wil zeggen: op de andere plaats een met de gegeven figuur congruente figuur oprichten.

12. Ik kan niet nalaten nog een veronderstelling naar voren te

brengen, die nooit vermeld wordt, maar toch van beslissende beteekenis is.

Volgens Einstein's theorie van de zwaartekracht moet de ruimte, zooals bekend, niet alleen van die van Euclides afwijken, maar ook op verschillende plaatsen in verschillende mate afwijken. Wij kunnen dit aan de hand van het volgende voorbeeld schetsen: wij stellen ons vóór, dat op verschillende plaatsen een gelijkzijdige driehoek is geconstrueerd; in de ruimte van Euclides zouden alle drie hoeken van zoo'n driehoek even groot zijn en tot som de gestrekte hoek hebben; in de wereld van Einstein echter zouden de hoeken van een gelijkzijdige driehoek niet eens overal alle aan elkaar gelijk zijn en hun som zou, bij gelijke lengte van de zijden, niet overal hetzelfde zijn. M.a.w. de ruimte van Einstein is niet „homogeen"; op verschillende plaatsen zijn de onderlinge betrekkingen tusschen de elementen van figuren, die alle volgens één en dezelfde methode geconstrueerd zijn, niet hetzelfde.

Als in de wereld van Einstein vaste (of bijna vaste) lichamen mogelijk waren en ook overgebracht konden worden, dan zouden zij toch nog niet voor het „overbrengen van figuren zonder verandering" kunnen dienst doen: de onderlinge betrekkingen in een op zoo'n lichaam afgeteekende figuur zouden op verschillende plaatsen verschillend zijn (hier behoeven wij er ons niet om te bekommeren, hoe de natuur zoo iets zou inrichten, maar slechts hoe wij het zouden vaststellen) en er zou überhaupt geen sprake zijn van „congruente figuren", tenminste niet op grootere afstanden. (Het schijnt weliswaar daarbij toch mogelijk een „klein genoeg vast lichaam" voor het introduceeren van het begrip „gelijke afstanden" te gebruiken).

Wij zien daaruit dat onze hierboven gegeven definitie van „congruente figuren" nog een rechtvaardiging noodig heeft, namelijk de veronderstelling:

Veronderstelling 1: *de ruimte is homogeen,* zonder welke veronderstelling die definitie onder bepaalde omstandigheden vol tegenspraak kan blijken te zijn.

Dat aan dergelijke tegenspraken gewoonlijk niet gedacht wordt, ligt aan het feit dat zij in onze dagelijksche ervaringen met de bijna vaste lichamen niet merkbaar zijn.

13. Aan de hand van het begrip „vast lichaam" en de zooeven

vermelde veronderstelling betreffende de homogeniteit van de ruimte kan gemakkelijk het begrip „rechte lijn" gedefinieerd worden.

Aan de ervaring ontleenen wij namelijk nog de volgende veronderstellingen:

Veronderstelling 2: *Als één punt O van een figuur onbewegelijk is, kan toch nog ieder ander punt van deze figuur bewegingen uitvoeren.*

Veronderstelling 3: *Als twee punten* A en B *van een figuur onbewegelijk zijn, dan zijn ook al die punten van deze figuur onbewegelijk, die zich op een bepaalde door A en B gaande lijn bevinden. Alle andere punten van deze figuur kunnen daarbij bewegingen uitvoeren.*

En dit maakt het ons mogelijk de „rechte lijn" te definieeren: *Een „rechte" is een lijn, die onbewegelijk blijft bij alle bewegingen van een figuur, waarvan zij een deel vormt, en waarbij twee willekeurige tot haar behoorende punten onbewegelijk zijn.*

Laten wij er nog een eveneens aan de ervaring ontleende veronderstelling aan toevoegen:

Veronderstelling 4: *Als drie niet op een rechte lijn liggende punten van een figuur onbewegelijk zijn, is de geheele figuur onbewegelijk.*

Dan kan men daaruit gemakkelijk *afleiden,* dat door twee punten van de ruimte slechts één rechte getrokken kan worden.

Wij kunnen onze zaak nog meer met de ervaring in overeenstemming brengen, als wij in plaats van de „onbewegelijkheid" uitdrukkelijk van de „relatieve onbewegelijkheid" met betrekking tot een vast lichaam spreken. De eenvoudigste physische illustratie van een „rechte" is dan een vouw in een papier of de rand van een lineaal, die bij alle standen, waarbij hij door twee gegeven punten gaat, steeds één en dezelfde indruk op het papier dat deze punten bevat, achterlaat.

14. In verband met het feit, dat er geen volkomen vaste lichamen zijn, wordt er dikwijls geprobeerd om de rechte niet zóó, als wij het gedaan hebben, als draaias van een vast lichaam, te introduceeren, maar haar te definieeren door zich te beroepen op zekere andere physische betrekkingen. Op deze manier beweert men b.v. dat de rechte de vorm van een gespannen touw of van een lichtstraal zou hebben.

Mij schijnen deze beide definities minder gelukkig, want men

kan haar niet consequent doorvoeren. Inderdaad: iedereen weet, dat een gespannen touw, streng genomen, niet rechtlijnig is; het is slechts dan waar, als het touw òf niet onderhevig is aan zwaartekracht òf oneindig sterk gespannen is, òf wel als zijn beide uiteinden zich bevinden op een vertikale . . . . rechte. Wat beteekenen echter dergelijke uitspraken? Blijkbaar gebruikt men daarbij een tweede definitie van de rechte zonder deze te formuleeren. Hetzelfde valt ook van het introduceeren van de rechte als een lichtstraal te zeggen: hoe zou men van reflexie en breking van de lichtstralen kunnen spreken — dus van hun eventueele afwijking van de rechtlijnigheid, als de rechte door niets anders dan door de lichtstraal zelf bepaald ware?

15. Laten wij, na alles wat gezegd is, onze aandacht toch een oogenblik op het onderwijs richten en laten wij onze conclusies betreffende de grondbegrippen van de geometrie eens vergelijken met dat wat de beginnelingen daar gewoonlijk over te hooren krijgen.

Of men de quasi-strenge definities al dan niet tracht te geven, geen leeraar kan het nalaten toch ook op de concrete objecten, die deze begrippen illustreeren, te wijzen.

Dit wordt echter meestal als een betreurenswaardige concessie aan de jeugdigheid van de leerlingen opgevat. Uit de bovenstaande overwegingen daarentegen, moet volgen, dat dit aanvoeren van physische objecten in overeenstemming is met een *wetenschappelijke eisch,* die gegrond is op de meening, dat onze ideeën over de ruimte geabstraheerd zijn uit onze physische ervaring en dat hun ontwikkeling in laatste instantie gewijd is aan het begrijpen en beheerschen van de natuur.

Natuurlijk kan men met de beginnelingen deze ervaring niet op dezelfde manier analyseeren, als wij het hierboven trachtten te doen. Maar misschien kan men er eenige toepassingen voor het onderwijs uithalen. Mij schijnt het b.v. toe, dat de leerlingen de procedure van het op elkaar leggen van driehoeken bij de congruentie- en gelijkheidsbewijzen, met meer begrip zullen opnemen, als men de bovengenoemde vier veronderstellingen (vooral de drie laatste) betreffende het bewegen van figuren in de ruimte expliciet bespreekt. Men weet immers, hoe dikwijls een leerling het als een onbegrijpelijke formaliteit beschouwt, dat men bij dit op elkaar plaatsen een bepaalde volgorde in het oog moet houden, en hoe

vaak deze hem juist daarom mislukt. Ook zou men hun meer kunnen laten zien, hoe essentieel het in de praktijk is, dat slechts één bepaalde lijn van een lichaam onbewegelijk blijft, als het lichaam nog een of andere beweging kan uitvoeren (de rol van de zwengel van een as, waaromheen men raderen wil laten draaien; de onmogelijkheid om een vlak te vouwen, als het geen regelvlak is; het controleeren van een rechtlijnigheid van een lineaal; het vergelijken van een rechtlijnige rand met soortgelijke niet-rechte randen die toch op meer dan één manier op één en hetzelfde spoor kunnen worden gelegd enz). Zoo zou de bewering, dat door twee punten slechts één rechte kan gaan, in hun oogen een levender en niet-triviale inhoud krijgen.

16. Wij gingen van het probleem uit, *hoe* men de grondbegrippen van een wetenschap moet *definieeren.* Bij de nadere bespreking van de grondbegrippen van de geometrie zijn wij onvermijdelijk met de andere vraag in aanraking gekomen: *wat* deze begrippen voor ons omvatten, en *hoe wij er aan komen.* Daarbij bleek, dat zij hun oorsprong vinden in de ervaring, en wij zijn tot de conclusie gekomen, dat de verwijzing naar de ervaring onontbeerlijk is voor het op een ondubbelzinnige manier vastleggen van deze begrippen.

Ik herinner mij een levendige discussie, die meerdere jaren geleden tusschen eenige mathematici en physici hier te lande gevoerd werd: in verband met de vraag, of het een mathematicus dan wel een physicus behoorde te zijn, aan wien men het onderricht in de mechanica aan de middelbare scholen moest toevertrouwen, werd overwogen, of de mechanica zelf een experimenteel of een zuiver rationeel vak was.

Ik hoop, dat het bovenstaande ook moge bijdragen tot de beantwoording van deze vraag.

13, II, 35, Leiden.

GEZICHTSBEDROG

DOOR

E. T. STELLER.

In de leerboeken voor natuurkunde staan steeds dezelfde plaatjes, van even groote lijntjes of vierkantjes, waarvan het eene grooter lijkt dan het andere en van evenwijdige lijnen, die heelemaal niet evenwijdig lijken, maar de draaiende slooten, die we uit de trein zien en het gevoel tusschen twee vuurtorens te staan, dat we krijgen, als we niet te dicht bij een vuurtoren met draaiend licht staan, heb ik nog niet gevonden, hoewel ze toch even aardig zijn. Vooral het laatste is aardig daar er even iets paradoxaals in zit.

Het verhaal, dat bij de slooten hoort, kennen we: Gelijke lineaire snelheid, maar, door verschil in afstand, verschillende hoeksnelheid voor den waarnemer. En op de laatste drie woorden komt het aan. Voor de vuurtorenwachter hebben alle punten van de lichtbundel dezelfde hoeksnelheid, maar voor iemand, die op een behoorlijke afstand van de vuurtoren tegen de duinen zit, heeft het deel van de bundel, dat vlak over hem heen scheert, verreweg de grootste hoeksnelheid, vandaar, dat hij duidelijk aan weerszijden een vuurtoren meent waar te nemen.

De schijnbare vuurtoren schijnt echter steeds verder weg te staan dan de echte, want van de laatste kunnen we telkens het licht zien opflitsen, terwijl we van de schijnbare alleen de blink meenen te zien; de bundel van de schijnbare vuurtoren „zien" we slechts over een stompe hoek draaien, terwijl de bundel van de echte over de volle 360 graden te volgen is, wat de indruk van de groote afstand, waarop de schijnbare zich zou bevinden, nog versterkt.

BOEKBESPREKING.

De Vaere, Herbiet en Horwart, Rekenkunde voor de lagere klassen van het middelbaar onderwijs. Drie deelen van samen 543 bladzijden. Namen, Wesmael—Charlier, 1933—1934.

De Vaere en Herbiet, Leerboek der Algebra voor middelbaar en normaalonderwijs. 545 bladzijden. Namen, Wesmael—Charlier, 1935.

Twee omvangrijke schoolboeken voor het Vlaamsche wiskunde-onderwijs. De Rekenkunde bestaat uit drie deeltjes, elk bestemd voor een leerjaar, en geeft aanmerkelijk meer, dan te onzent op de middelbare scholen aan rekenkunde wordt behandeld. Het eerste deeltje geeft eene eenvoudige inleiding tot het rekenen met natuurlijke getallen en breuken, dus beperkt zich tot niet-negatieve rationale getallen, en behandelt voorts ingekleede vraagstukken en het metrieke stelsel. Terwijl in dit deeltje de getallen uitsluitend met behulp van cijfers worden voorgesteld, komt in het tweede stuk de voorstelling van getallen door letters aan de orde, gevolgd door de theorie van verhoudingen en evenredigheden en evenredige afhankelijkheid van grootheden, practische vraagstukken en een overzicht van niet-decimale maatstelsels. Het derde deeltje behandelt de theorie van de deeling en van de vierkantsworteltrekking, en van grootsten gemeenen deeler en kleinste gemeene veelvoud. Een paar complementen behandelen de derdemachtsworteltrekking, de repeteerende breuken, en financieele rekenkunde, dat is vraagstukken over intrestrekening, spaarbanken, verzekeringen en dergelijke.

Het leerboek der algebra bevat vrijwel wat op onze hoogere burgerscholen met vijfjarigen cursus onderwezen wordt (alleen is de behandeling van de limieten, afgeleide functie en continuiteit iets uitgebreider); het boek zou op de Nederlandsche scholen heel goed bruikbaar zijn, wanneer de complexe getallen er niet in ontbraken. Het onderscheidt zich van de meeste Nederlandsche werken door eene breed opgezette, nauwkeurige en volledige behandeling der theorie; de talrijke opgaven zijn zoo gekozen, dat zij voor volledige oplossing niet te moeilijk zijn; te onzent komt het maar al te vaak voor, dat algebra-opgaven alleen dan een gepasten graad van moeilijkheid hebben, als men zich met de berekeningen, die tot het antwoord leiden, tevreden stelt. Als illustratie van de nauwkeurigheid der theoretische behandeling moge hier worden aangehaald, dat niet vergeten is te wijzen op de gevaren, welke eene schijnbaar zoo onschuldige bewerking als het toevoegen van gelijkluidende termen aan beide leden eener vergelijking meebrengt (bladz. 150); de bepaling van limietwaarde eener functie (bladz. 501) is terecht zoo geformuleerd, dat de gelijk-

heid van limietwaarde en functiewaarde er niet uit kan worden afgeleid. Er zijn meer van dergelijke voorbeelden van prijzenswaardige nauwkeurigheid te noemen; het maakt daarom een eigenaardigen indruk, dat in enkele fundamenteele en hoogst elementaire definities de theorie te kort schiet: nadat op bladzijde 146 aan een voorbeeld is verduidelijkt, dat eene vergelijking eene vraag is, volgt op bladzijde 147 eene definitie, die hiermede geenszins in overeenstemming is. Ook bevreemdt het, dat de schrijvers de vierkantsvergelijkingen doen voorafgaan aan de quadratische functie.

Het schrijven van een wiskundig werk in het Nederlandsch is voor Belgen geen gemakkelijke taak; de heeren De Vaere en Herbiet hebben de hieraan verbonden moeilijkheden glansrijk overwonnen: hoogst zeldzaam zijn de zinswendingen, die den Noord-Nederlander doen glimlachen. Mij is het eene vreugde geweest, een boek onder oogen te krijgen, waarin gebruik is gemaakt van de buiten Nederland nog heerschende vrijheid, ook in schoolboeken spelling en pronominale aanduiding te geven, wat haar toekomt.

Ik hoop, dat deze degelijke leerboeken in België succes mogen hebben, en beveel speciaal het leerboek der algebra in de belangstelling der Nederlandsche leeraren aan. J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

COMPOSITIO MATHEMATICA, vol. 2, fasc. 1:

Eduard Čech, Sur la connexité locale d'ordre supérieur 1

Alexander Ostrowski, Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I 26

Heinz Hopf, Ueber die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven 50

T. Wazewski, Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues 63

Stefan Cohn-Vossen, Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen 69

Hans Freudenthal, Die Hopfsche Gruppen 134

Hans Freudenthal, Ueber die topologische Invarianz kombinatorischer Eigenschaften des Aussenraumes abgeschlossener Mengen 163

P. WIJDENES, *Beknopte meetkunde I,* **8ste druk.** 106 bladz., 138 fig., gecartonneerd, met gradenboog en overzicht *f* 1.70

P. WIJDENES, *Algebra* voor middelbare handelsscholen deel II — **5de druk** . . . . gebonden *f* 1.75
Antwoorden — 2de deeltje — **3de druk** . . . . . *f* 1.20

M. LECAT, *Erreurs de Mathématiciens des origines à nos jours.* 168 bladz. Brussel en Leuven, 1935.

HISTORISCHE REVUE

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société hollandaise des Sciences. Tome XVIII. La Haye (Martinus Nijhoff) 1934. 702 blz.

We kunnen deze *Historische Revue* niet op een meer waardige wijze beginnen dan door met vreugde de verschijning van het nieuwe deel der groote Huygens-uitgave te begroeten, die op het gebied der wetenschapsgeschiedenis onze nationale trots is. De hoofdinhoud van dit achttiende deel wordt gevormd door het groote werk *Horologium Oscillatorium* (1673), waarin niet alleen, zooals de titel zou kunnen doen vermoeden, het slingeruurwerk wordt beschreven, maar tevens al de beroemde onderzoekingen op het gebied van wiskunde en mechanica (cycloidale valbeweging, physische slinger, evoluten en evolventen) worden behandeld, waartoe de wetenschappelijke verdieping van zijn technische vondst Huygens gevoerd had. Op het hoofdwerk volgen de tegenwerpingen van Roberval met de antwoorden en een overzicht van de omvangrijke controversen, waartoe de nieuwe theorieën verder aanleiding hebben gegeven. Uit een reeks van nog niet eerder gepubliceerde stukken blijkt daarna, dat Huygens in het bezit is geweest van een algemeene formuleering van de wet van behoud van arbeidsvermogen en dat hij als de ontdekker heeft te gelden van de algemeene theorie van het isochronisme van de enkelvoudige trilling. Ten slotte vindt men nog acht stukken, die de techniek en de toepassing van het slingeruurwerk betreffen.

Over de bewerking der uitgave kunnen we gevoegelijk zwijgen; iedereen weet tegenwoordig wel, op hoe uitmuntende wijze zij geschiedt en hoe te midden van de talrijke moderne edities van de werken der groote historische figuren op het gebied van wis- en natuurkunde die van Huygens steeds facile princeps blijft.

Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung B. Studien. Band III. Heft 1. Berlin (Springer) 1934. 114 blz. R.M. 15.

Van dit tijdschrift, waarvan het tempo van uitgave sedert de laatste twee jaren aanmerkelijk vertraagd is, verscheen sedert de vorige *Historische Revue* één nieuwe aflevering, waarin drie artikelen.

1. G. Junge. *Das Fragment der lateinischen Ubersetzung des Pappus-Kommentars zum 10. Buche Euclids.*

De commentaar van Pappos op het tiende Boek van de *Elementen* van Euclides (naast die van Proklos op Boek I de eenige uit Griekschen tijd, die bewaard is gebleven) is volledig slechts bekend in een Arabische vertaling, waarvan de fraaie laatste uitgave (Arabische tekst met Engelsche vertaling), door G. Junge en W. Thomson bezorgd, bij haar verschijnen in deze *Revue* is besproken.. (*Euclides* VII, 1930-'31). Van een Latijnsche vertaling, die misschien door, maar in ieder geval niet lang na Gherard van Cremona († 1187) gemaakt is, is een fragment bewaard gebleven, dat hier thans met een inleiding wordt gepubliceerd. Nieuwe mathematisch-historische gezichtspunten worden daarbij uit den aard der zaak niet geopend; de publicatie zal hoofdzakelijk voor philologen van belang kunnen zijn.

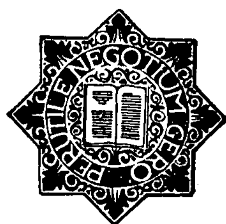
2. Jacob Klein. *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra.* In dit zeer omvangrijke artikel (het thans gepubliceerde deel bevat 77 blz.) tracht de schrijver de bronnen op te sporen, waaruit de moderne mathematische symboliek is ontstaan, om op deze wijze een bijdrage te kunnen leveren tot opheldering van de begripsmoeilijkheden, die de relatie van inhoud en vorm in de hedendaagsche mathematische physica (die zich niet meer los laat maken van haar mathematische inkleeding en waarvoor die inkleeding dus meer dan vorm van uitdrukking is) doet rijzen. Als beslissend moment in de geschiedenis der symboliek ziet hij de

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES



11e JAARGANG 1934/35

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - BATAVIA

Inhoud van de elfde jaargang.

Artikelen.

Congres 1934. Tweede gedeelte.

	Blz.
Tweede Nederlandsch congres van leeraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen; tweede gedeelte	1— 46
Kort verslag van de rede van Prof. Dr. F. ZERNIKE over de natuurkundige en de wiskundige beschouwingswijze	1
Dr. A. RUTGERS, Neutronen, positronen en kernstructuur	2— 15
Prof. L. K. WOLFF, Vitaminen B en C	16— 17
Prof. Dr. R. P. VAN CALCAR, De sociale beteekenis der biologie	18— 29
Prof. Dr. H. A. KRAMERS, De ideëele beteekenis van het onderwijs in de exacte vakken	30— 36
Mej. Dr. J. G. MODDERMAN, Colloidchemie op het Gymnasium en op de H. B. S.	37— 46

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Historische revue . . 47—54,	277—284
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Antwoord aan E. W. Beth	55— 56
B. COSTER, Didaktiek of exactheid	57— 80
Dr. G. F. C. GRISS, Problemen der invariantentheorie .	81— 86
K. F. HARTUNG, Die zu einem regelmässigen Sechs-, Acht-, Zwölf- und Zwanzigflach ein- und umbeschriebenen reziproken regulären Polyeder	94—104
K. F. HARTUNG, Eine elementare analytische Herleitung sämtlicher dem Würfel einbeschriebenen regelmässigen Oktaeder	152—156
Ir. D. J. KRUIJTBOSCH, De eerste kennismaking met de logarithmen	105—117
Dr. D. P. A. VERRIJP, Resultaten bij het onderwijs in de wiskunde	118—123
Dr. H. C. SCHAMHARDT, Vragen van het mondeling staatsexamen	130—151
Uit het Verslag der Staatsexamencommissie 1934 . .	157—158
Prof. Dr. L. E. J. BROUWER, Erratum op het artikel „Willen, weten, spreken"	160
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Het leven van Archimedes . .	163—210
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, De logische grondslagen der Euklidische meetkunde	211—215

Blz.

Prof. Dr. B. L. VAN DER WAERDEN, Antwoord aan Dr. Dijksterhuis . . . . 216—219
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Naschrift bij het antwoord . . 220—222
Dr. S. P. SLAGTER, Een meetkundige afleiding voor het minimum van deviatie . . . . 223—225
Dr. JOH. H. WANSINK, Delen door nul . . . . 226—238
H. J. E. BETH, Over niet tot het einde, en daardoor foutief opgeloste mechanica-vraagstukken 240
P. WIJDENES, Gebroken rationale vergelijkingen . . . 241—246
P. WIJDENES, Het eerste vraagstuk over driehoeksmeting van het eindexamen H. B. S. met vijfjarige cursus in 1935 . . . . 247—255
T. EHRENFEST–AFANASSJEWA, Een en ander over de definities . . . . 256—273
E. T. STELLER, Gezichtsbedrog 274

Boekbesprekingen.

H. TURKSTRA, Psychologisch-didactische problemen bij het onderwijs in de wiskunde aan de Middelbare school 87— 90
Ir. E. S. LEVISON en Ir. E. D. G. FRAHM, Leerboek der Natuurkunde voor kweekscholen . . . . 90— 91
Dr. W. J. H. MOLL en Dr. H. C. BURGER, Leerboek der Natuurkunde II . . . . 91— 92
E. LANDAU, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung . . . . 92— 93
P. WIJDENES, Meetkundige Vraagstukken I en II . . . 124—125
Dr. H. J. E. BETH, Inleiding tot de Differentiaal- en integraalrekening . . . . 125—127
Dr. M. J. LANGEVELD, De psychologie der Middelbareschoolklasse . . . . 127—129
Prof. Dr. HK. DE VRIES, Historische Studiën II . . . 159
H. A. KRAMERS, Natuurkunde en Natuurkundigen . . 159—160
Dr. H. J. E. BETH, Meetkunde van de Ruimte . . . . 239—240
DE VAERE, HERBIET en HORWART, Rekenkunde voor de lagere klassen van het Middelbaar onderwijs . . . 275—276
DE VAERE en HERBIET, Leerboek der Algebra . . . . 275—276

Ingekomen boeken 129, 160, 276

opname en verdere ontwikkeling van de techniek van Diophantos door Viète; om hierbij goed te kunnen overzien, welk aandeel in het door Viète tot stand gebrachte aan hem zelf en welk aan Diophantos toekomt, beschouwt hij eerst de arithmetica van Diophantos tegen den achtergrond van de neo-platonische wiskundige literatuur, wat natuurlijk onvermijdelijk tot de discussie van Plato's denkbeelden over arithmetica en logistica en de daarop door Aristoteles uitgeoefende kritiek voert.

3. O. Neugebauer. *Serientexte in der babylonischen Mathematik.* De bekende autoriteit op het gebied van Babylonische Wiskunde bericht hier over een merkwaardige reeks van veertien genummerde spijkerschrift-tabletten, die elk ca. 50 onderling verwante vraagstukken bevatten, zoodat er een systematische collectie van ca. 700 vraagstukken over een bepaald gebied ontstaat. De teksten zijn zuiver ideographisch geschreven in een uitdrukkingswijze, die met de gesproken taal geenerlei overeenkomst meer vertoont en die alleen als mathematisch symbolenschrift kan worden geinterpreteerd. De vroegere beschouwingen van den schrijver over het algebraische karakter der Babylonische Wiskunde worden hierdoor nog eens nadrukkelijk bevestigd en het door hem steeds toegepaste systeem van transcriptie der wiskundige teksten in de moderne rekensymboliek vindt zijn volle rechtvaardiging. De behandelde vraagstukken voeren, voorzoover bewaard, tot quadratische vergelijkingen; de ontbrekende hebben vermoedelijk problemen bevat, waarvan de behandeling de oplossing van de algemeene vergelijking van den derden graad heeft vereischt. Hoe die oplossing in zijn werk kan zijn gegaan, kan nog niet gezegd worden. De lezer, die zich voor dit onderwerp interesseert, kan nader de hieronder te vermelden *Vorlesungen* van Neugebauer raadplegen en een artikel van Kurt Vogel, *Kubische Gleichungen bei den Babyloniern?* Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1934; pag. 87—94.

Bibhutibhusan Datta. *The Science of the Sulba. A Study in early Hindu Geometry.* Published by the University of Calcutta. 1932.

Dit werk van den bekenden Indischen historicus der wiskunde vormt een welkome en belangrijke bijdrage tot de kennis der Oostersche geometrie in het prae-Helleensche tijdvak. Behandeld worden de z.g. *Sulba-sūtras* (d.z. handboeken voor de constructie van

altaren, waarop offers werden gebracht en die, op straffe van waardeloosheid der religieuse handeling, geconstrueerd moesten zijn volgens voorschriften van de Veden). De belangrijkste dezer *Sulbas,* resp. genaamd naar Baudhāyana, Apastamba en Kātyāyana, zijn uit denzelfden tijd (ca. 500—300 v. Chr.), waarin de Grieksche wiskunde haar periode van sterksten groei beleefde. Echter blijken de gegeven regels afkomstig te zijn uit veel oudere perioden; het gelukt den schrijver ze te vervolgen tot vóór den tijd der *Rig-Veda,* dus vóór 3000 v. Chr. Wanneer deze conclusie juist is (controle ervan is zonder kennis van Sanskrit en bestudeering der zeer omvangrijke literatuur uiteraard onmogelijk), zien we de tijdsgrenzen voor het ontstaan der meetkunde hier al even sterk achteruitwijken als ze dat voor rekenen en algebra hebben gedaan bij het bekend worden van de Babylonische praestaties op mathematisch gebied. We moeten dus voortaan rekening houden met de hooge waarschijnlijkheid, dat de z.g. stelling van Pythagoras (in de Indische wiskunde voorkomend in den vorm: het vierkant op de diagonaal van een rechthoek is gelijk aan de som van de vierkanten op de zijden) inderdaad (zooals reeds vroeger door verschillende kenners der Indische cultuur is betoogd) meer dan 20 eeuwen oud kan zijn geweest, toen de wijsgeer van Samos haar in zijn logisch systeem opnam, dat problemen als dat van de quadratuur van den cirkel en het omgekeerde, de cycliseering van een vierkant, van de rationale benadering van irrationale vierkantswortels (de Sulba kent de opmerkelijke benadering $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$, die, decimaal geschreven, 1,4142156 . . bedraagt en dus pas in de zesde decimaal van de ware waarde 1,414213 . . . afwijkt) eveneens al eeuwenoud zijn, wanneer ze in de Grieksche wiskunde weer opduiken en dat in het algemeen van de stof van de *Elementen* van Euclides een groot deel (met name de theorie van oppervlakten van vlakke figuren) van oud-Indischen oorsprong kan zijn geweest. Natuurlijk doet ieder van deze conclusies weer nieuwe vragen rijzen: de samenhang van de verschillende prae-Helleensche wiskunden onderling en van elk harer met de Grieksche blijft een even duister als dringend probleem; de mate, waarin de Hindoes hun wiskundige inzichten reeds tot een redelijk systeem hebben verwerkt en het peil hunner eventueele bewijsvoering hebben aan nadere verduidelijking sterk behoefte. In afwachting hiervan kan het werkje van B. Datta echter

als een zeer belangrijke aanwinst van de historische literatuur over de oudste phasen der wiskunde worden begroet.

O. Neugebauer. *Vorlesungen über die Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften.* Erster Band. *Vorgriechische Mathematik.* Berlin (Springer) X en 212 blz.

In het eerste der drie deelen, waaruit het volledige werk zal bestaan (het tweede zal over Grieksche wiskunde, het derde over klassieke astronomie handelen) geeft de schrijver een systematische, voor een groot deel op eigen onderzoekingen gebaseerde uiteenzetting van de huidige kennis der Babylonische en Aegyptische wiskunden. Voor wie de talrijke publicaties, die hij over beide gebieden heeft laten verschijnen, steeds gevolgd heeft, bevat dit samenvattende werk uiteraard weinig nieuws; het is echter een groot genot, hier nu alles eens in onderlingen samenhang bijeen te vinden en de verschillende baanbrekende onderzoekingen, die de schrijver voornamelijk op het gebied der Babylonische wiskunde verricht heeft, in zoo aangenaam leesbaren vorm nog eens door te kunnen gaan. Bovendien vindt men hier nog, wat de aparte verhandelingen uit den aard der zaak niet gaven, heldere en belangrijke uiteenzettingen over taal en schrift der beide bestudeerde culturen, die in het geheel niet beschouwd mogen worden als bijkomstige aanhangsels, maar die integendeel een wezenlijke beteekenis voor het juiste begrip van de eigenaardigheden harer wiskunden. Het blijkt o.a. dat de wijze, waarop Sumerische elementen in de gesproken en geschreven taal der latere Babylonische perioden voortleven, in hooge mate aansprakelijk kan worden gesteld vóor het sterk algebraisch karakter van de beoefening der wiskunde.

Het werk van den uitnemenden Duitschen historicus der wiskunde beduidt een zeer belangrijke bijdrage tot de moderne historisch-mathematische literatuur; er is alle aanleiding, de beide volgende deelen, die in nog veel hoogere mate dan het eerste nog ongepubliceerde onderzoekingen zullen bevatten, met spanning tegemoet te zien.

F. Thureau-Dangin. *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal. Paris* (Geuthner) 1932. 80 blz.

Hoewel reeds enkele jaren oud, moge hier het werkje, dat de groote Fransche Assyrioloog aan den oorsprong van het z.g. sexa-

gesimale getallensysteem der Babyloniers gewijd heeft, nog een korte aankondiging vinden, omdat het voor den lezer van het hierboven aangekondigde werk van Neugebauer waarde kan hebben, kennis te nemen van een theorie, die sterk van de daarin verdedigde afwijkt. Thureau-Dangin ontkent nl. de door Neugebauer verdedigde (en door een omvangrijk bewijsmateriaal naar onze meening tot een hoogen graad van waarschijnlijkheid verheven) mogelijkheid, dat het sexagesimale stelsel zijn ontstaan te danken zou hebben aan metrologische eigenaardigheden, die in een tijd, waarin honderd nog niet als eerste op tien volgende rusttrede in het getallenstelsel was aanvaard, er toe zouden hebben geleid, zestig als een nieuwe eenheid te kiezen. Volgens hem is het veelvuldig voorkomen van de verhouding van 1 : 60 tusschen twee maateenheden een gevolg van het gebruik van 60 als basis van het talstelsel, niet de oorzaak daarvan. Het is uiteraard niet mogelijk, in een aankondiging als deze, zelfs maar een poging te doen, een zoo aanzienlijk meeningsverschil tusschen twee autoriteiten op het gebied der Babylonische wiskunde op te lossen. Wel kan worden opgemerkt, dat de theorie van Neugebauer in zooverre dieper gaat dan die van Thureau-Dangin, dat zij niet alleen het optreden van zestig als basis van het getallenstelsel der Babyloniers verklaart (voorzoover zoo iets te verklaren is; want men kan er natuurlijk dadelijk een nieuw probleem uit maken, hoe het gekomen is, dat opvolgende maateenheden voor grootheden van een bepaalde soort, b.v. gewichten, de verhouding 1 : 60 hadden), maar in verband daarmee tevens de merkwaardige eigenaardigheid, dat in het positioneele karakter van hun cijferschrift gelegen is, opheldert; over dit punt spreekt de Fransche historicus zich in het geheel niet uit.

We volstaan verder met de opmerking, dat het werkje zeer helder geschreven is en dat er interessante conclusies in voorkomen over den oorsprong van de indeeling van den dag in 24 uren en van den cirkel in 360 graden (die onafhankelijk blijkt te zijn van het sexagesimale stelsel).

J. G. Crowther. *British Scientists of the* 19th *century*. London. (Kegan Paul, Trench, Trubner & Co.) 1935. XII en 332 blz. 12 sh. 6 d.

Dit werk bevat studies over de vijf meest representatieve figuren in de beoefening van physica en chemie in het Engeland der 19e

eeuw: Davy, Faraday, Joule, W. Thomson (Lord Kelvin) en Maxwell. Het is een zeer ongewoon boek: het geeft nl. niet alleen de biographieën van de behandelde onderzoekers en een breed opgezette uiteenzetting van hun wetenschappelijk werk, maar tevens uitvoerige beschouwingen over hun sociologische beteekenis, met name over den samenhang, die er volgens den schrijver bestaat tusschen hun verschijnen en de sociaal-oeconomische structuur van de Britsche samenleving in de 19e eeuw. Dit maakt het werk lezenswaard voor veel breedere kringen dan die, waarin men aandacht voor de geschiedenis der moderne natuurwetenschap als zoodanig mag verwachten; het richt zich evenzeer tot hen, wier cultuurhistorische belangstelling uitgaat naar den invloed, dien de natuurwetenschap in de 19e eeuw door bemiddeling van de techniek op het maatschappelijk leven heeft uitgeoefend, doordat ze de snelle ontwikkeling der industrie met haar verstrekkende sociale en oeconomische gevolgen mogelijk maakte. Het is er echter verre van, dat het aan de tweede categorie van lezers met evenveel gerustheid zou kunnen worden aanbevolen als aan de eerste; dezen toch zullen er een met waarlijk ruimen blik geschreven schets in vinden van de plaats, die aan de vijf groote Engelschen in de ontwikkeling van de physica en chemie toekomt, waarbij de heldere behandeling van het ontstaan der mechanische warmtetheorie met haar juiste beoordeeling van de verdiensten, die Carnot, Mayer en Clausius zich naast Joule en Thomson hebben verworven, een bijzondere vermelding verdient; genen echter, die in vele gevallen over het natuurwetenschappelijk aspect der behandelde vraagstukken geen zelfstandig oordeel zullen kunnen vellen, zullen in de meest wonderlijke misvattingen kunnen vervallen, wanneer ze zich door de met groote stelligheid voorgedragen hoogst doctrinaire Marxistische beschouwingen van den schrijver mochten laten imponeeren. We volstaan met één staaltje uit vele (pag. 131): Waarom gevoelt de hedendaagsche beoefenaar der natuurwetenschap voor Joule wel respect, maar geen enthousiasme? Antwoord: The comprehensive human imagination could not be nourished by Joule's discoveries because they sprang from poisoned social sources. They arose out of studies of engines that had been appropiated to the creation of private wealth instead of an increase of human dignity.

Men kan uit dit citaat reeds eenigszins de vaak aan het phantastische grenzende neiging tot overdrijving opmaken, die den schrijver

eigen is en die door een sterk vermogen tot generaliseeren en tot het opsporen van samenhangen tusschen de meest uiteenloopende verschijnselen wordt begeleid. De gewrongen vergelijkingen van Davy met Balzac, van Faraday met Tolstoi, van Kelvin met Leonardo da Vinci, de toespelingen op het verband tusschen wetenschappelijke genialiteit en sexueele abnormaliteit en tusschen dissentersgeest en voorliefde voor experimenteel onderzoek zijn weer slechts enkele voorbeelden uit vele, die aantoonen, hoe gevaarlijk dit boek kan worden in handen van lezers, die niet met de noodige kritische gezindheid gewapend zijn.
